Math93.com

Baccalauréat 2017 - S Antilles Guyane

Série S Obli. et Spé.
16 Juin 2017
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.* (

Exercice 1. 3 points

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation $(E) : z^4 + 2z^3 - Z - 2 = 0$ *ayant pour inconnue le nombre complexe* z.

1. **Donner une solution entière de (E).**
   Pour $z = 1$ on a :
   $$1^4 + 2 \times 1^3 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$$
   Donc 1 est une solution entière de (E).

2. **Démontrer que, pour tout nombre complexe z, $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0 \Longleftrightarrow (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) = 0$.**
   $$\begin{aligned}\left(z^2+z-2\right)\left(z^2+z+1\right) &= z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z - 2 \\ &= z^4 + 2z^3 - z - 2\end{aligned}$$

3. **Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.**
   $$\begin{aligned}(E) &\Longleftrightarrow \left(z^2+z-2\right)\left(z^2+z+1\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \left(z^2+z-2\right) = 0 \text{ ou } \left(z^2+z+1\right) = 0 \\ (E) &\Longleftrightarrow z \in \left\{1\,;\,-2\,;\,\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}\end{aligned}$$

4. **Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que ABCD est un quadrilatère non croisé. Le quadrilatère ABCD est-il un losange ? Justifier.**
   On note :
   $$A(1)\,;\,C(-2)\,;\,D\left(\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\,;\,B\left(\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)$$
   On a alors :

$$\begin{aligned}AB^2 &= |z_B - z_A|^2 \\ &= \left|\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} - 1\right|^2 \\ &= \left|\frac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right|^2 \\ &= \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \\ AB^2 &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AD^2 &= |z_D - z_A|^2 \\ &= \left|\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} - 1\right|^2 \\ &= \left|\frac{-3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right|^2 \\ &= \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \\ AD^2 &= 3\end{aligned}$$

Et de même

$$\begin{aligned}
BC^2 &= |z_C - z_B|^2 \\
&= \left|-2 - \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right|^2 \\
&= \left|\frac{-3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right|^2 \\
&= \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \\
BC^2 &= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CD^2 &= |z_D - z_C|^2 \\
&= \left|-2 - \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right|^2 \\
&= \left|\frac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right|^2 \\
&= \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \\
BC^2 &= 3
\end{aligned}$$

On a bien $AB = BC = CD = DA$ donc le quadrilatère non croisé ABCD est un losange.

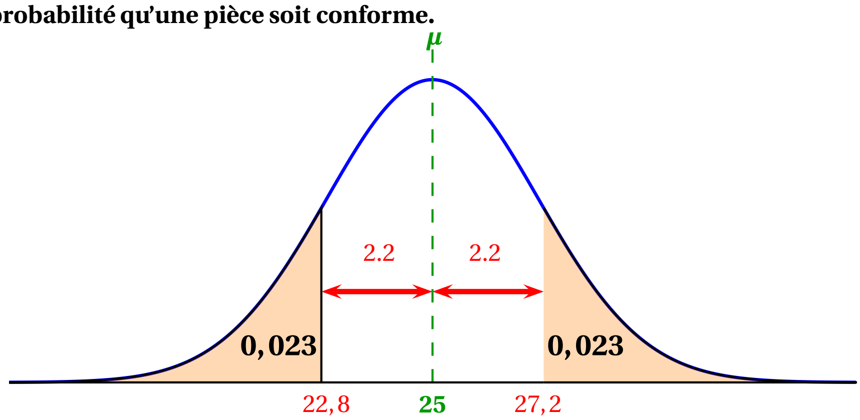
Exercice 2. 4 points

Commun à tous les candidats

Dans une usine automobile, certaines pièces métalliques sont recouvertes d'une fine couche de nickel qui les protège contre la corrosion et l'usure. Le procédé utilisé est un nickelage par électrolyse. On admet que la variable aléatoire X, qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (μm) et d'écart type σ_1. Une pièce est conforme si l'épaisseur de nickel déposé est comprise entre 22,8 μm et 27,2 μm. La fonction de densité de probabilité de X est représentée ci-dessous. On a pu déterminer que $P(X > 27,2) = 0,023$.

1.

1. a. Déterminer la probabilité qu'une pièce soit conforme.



$P(X \leq 22,8) = 0,023 = P(X \geq 27,2)$

La probabilité qu'une pièce soit conforme est $P(22,8 < X < 27,2)$ or on a :

$$\begin{aligned}
P(22,8 < X < 27,2) &= P(25 - 2,2 < X < 25 + 2,2) \\
&= 1 - 2 \times P(X > 27,2) \\
&= 1 - 2 \times 0,023 = \underline{0,954}
\end{aligned}$$

La probabilité qu'une pièce soit conforme est de 0,954.

1. b. Justifier que 1,1 est une valeur approchée de σ_1 à 10^{-1} près.

Propriété 1 (Les intervalles « un, deux, trois sigma »)

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

$$\begin{aligned} P\left(\mu-\ \ \sigma \le X \le \mu+\ \ \sigma\right) &\approx 0,683 \quad : (1)\\ P\left(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma\right) &\approx 0,954 \quad : (2)\\ P\left(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma\right) &\approx 0,997 \quad : (3) \end{aligned}$$

On vient de voir lors de la question (1a) que :

$$P(22,8<X<27,2) = P(25-2,2<X<25+2,2) = \underline{0,954}$$

La variable X suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (μm) et d'écart type σ_1, donc par identification avec la relation (2) de la propriété 1 :

$$\left\{\begin{array}{l} P(25-2,2<X<25+2,2) = 0,954 \\ P(25-2\sigma \le X \le 25+2\sigma) \approx 0,954 \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow 2,2 \approx 2\sigma_1$$

De ce fait $\underline{\sigma_1 \approx 1,1}$.

1. c. Sachant qu'une pièce est conforme, calculer la probabilité que l'épaisseur de nickel déposé sur celle-ci soit inférieure à 24 μm. Arrondir à $10^{?3}$.

La probabilité cherchée est : $P_{22,8<X<27,2}(X<24)$ avec X qui suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ et d'écart type $\sigma_1 \approx 1,1$. On a :

$$\begin{aligned} P_{22,8<X<27,2}(X<24) &= \frac{P((22,8<X<27,2)\cap(X<24))}{P(22,8<X<27,2)}\\ &= \frac{P(22,8<X<24)}{P(22,8<X<27,2)}\\ &\approx \frac{0.158901}{0,954}\\ P_{22,8<X<27,2}(X<24) &\approx 0.166563 \end{aligned}$$

Sachant qu'une pièce est conforme, calculer la probabilité que l'épaisseur de nickel déposé sur celle-ci soit inférieure à 24 μm est, arrondie au millième, d'environ $\underline{0,167}$.

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 :* $\left(\textit{TIStat.normFDR}(22,8\ ,\ 24\ ,\ 25\ ,\ 1.1)\right) \approx \underline{0,158901}$
- *Sur TI82/83+ : normalcdf*(22,8 , 24 , 25 , 1.1) *ou (fr.) normalfrép*(22,8 , 24 , 25 , 1.1)
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd ⇒ NormCD*(22,8 , 24, 1.1 , 25)

2. *Une équipe d'ingénieurs propose un autre procédé de nickelage, obtenu par réaction chimique sans aucune source de courant. L'équipe affirme que ce nouveau procédé permet théoriquement d'obtenir 98 % de pièces conformes. La variable aléatoire Y qui, à chaque pièce traitée avec ce nouveau procédé, associe l'épaisseur de nickel déposé suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 25\mu m$ et d'écart-type σ_2.*

2. a. En admettant l'affirmation ci-dessus, comparer σ_1 et σ_2.

- <u>Comparaison</u> : On a X et Y deux variables aléatoires de même espérance $\mu-1 = \mu_2 = 25$. On a d'après les données :

$$P(22,8<X<27,2) = 0,954 > P(22,8<Y<27,2) = 0,98$$

De ce fait on a nécessairement : $\underline{\sigma_2 < \sigma_1 \approx 1,1}$.

- Complément : Calcul de σ_2 (*non demandé*)
  On va déterminer σ_2.

Propriété 2

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.
La variable aléatoire Y suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma_2^2\right)$ si et seulement si, la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y-\mu}{\sigma_2}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Donc ici, puisque Y suit la loi normale $\mathcal{N}\left(25\,;\,\sigma_2^2\right)$, la v.a. $Z = \dfrac{Y-25}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
On cherche ici une valeur approchée à 10^{-3} de σ_2 sachant que $P(22.8 \leqslant Y \leqslant 27.2) = 0,98$, or :

$$\begin{aligned}
P(22.8 \leqslant Y \leqslant 27.2) = 0,98 &\iff P\left(\frac{22.8-25}{\sigma_2} \leqslant \frac{Y-25}{\sigma_2} \leqslant \frac{27.2-25}{\sigma_2}\right) = 0,98\\
&\iff P\left(\frac{-2,2}{\sigma_2} \leqslant Z \leqslant \frac{2,2}{\sigma_2}\right) = 0,98
\end{aligned}$$

Or la v.a. Z suit la loi normale centrée réduite et on rappelle que :

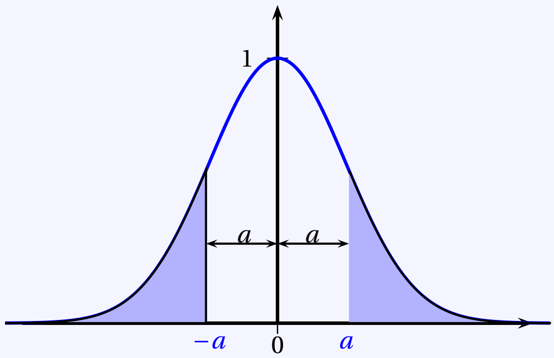
Propriété 3

Soit Z une v.a. qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

2. a. 1. La fonction Φ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(t) = P(Z \le t)$.

2. a. 2. Pour tout réel a on a :

- (1) : $P(Z \le -a) = P(Z \ge a)$
- (2) : $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
- (3) : $P(-a \le Z \le a) = 2\Phi(a) - 1$



De ce fait en appliquant la relation (3) de la propriété 3 :

$$\begin{aligned}
P(22.8 \leqslant Y \leqslant 27.2) = 0,98 &\iff P\left(\frac{-2,2}{\sigma_2} \leqslant Z \leqslant \frac{2,2}{\sigma_2}\right) = 0,98\\
&\iff 2\Phi\left(\frac{2,2}{\sigma_2}\right) - 1 = 0,98\\
&\iff \Phi\left(\frac{2,2}{\sigma_2}\right) = \frac{0,98+1}{2} = 0,99\\
&\iff P\left(Z \le \frac{2,2}{\sigma_2}\right) = 0,99
\end{aligned}$$

La calculatrice nous donne alors avec la fonction répartition normale réciproque :

$$Z \sim \mathcal{N}(0\,;\,1) \Longrightarrow \frac{2,2}{\sigma_2} \approx 2,32634787$$

Soit arrondi à 10^{-3} près :

$$\boxed{\sigma_2 \approx 0,946}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0{,}99\,,\,0\,,\,1) \approx \underline{2{,}32634787}$
- *Sur TI82/83+ : invNorm*$(0{,}99\,,\,0\,,\,1)$ *ou (fr.) FracNormale*$(0{,}99\,,\,0\,,\,1)$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN* $\Rightarrow$ *InvNormCD*$(0{,}99\,,\,1\,,\,0)$

 ©ISSN 2272-5318

2. b. Un contrôle qualité évalue le nouveau procédé; il révèle que sur 500 pièces testées, 15 ne sont pas conformes. Au seuil de 95 %, peut-on rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs?

- **Analyse des données** :
  - « Sur un échantillon de $n = 500$ pièces. Il est constaté que 485 sont conformes. ». Donc la fréquence observée pièces conformes est
  $$f = 485 \div 500 = 0{,}97 \text{ soit } \underline{f = 0{,}97}$$
  - On veut tester l'hypothèse : « la proportion de pièces conformes est $\underline{p = 98\%}$ ».
- **Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 500$, $p = 98$ %. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 500 \geq 30 \\ \checkmark & np = 500 \times 0{,}98 = 490 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 500 \times 0{,}02 = 10 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0{,}98 - 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}98 \times 0{,}02}}{\sqrt{500}}\ ;\ 0{,}98 + 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}98 \times 0{,}02}}{\sqrt{500}} \right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1{,}96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}96773$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}967}$.
- $p + 1{,}96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}99227$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}993}$.

$$\boxed{I_{500} \approx [0{,}967\ ;\ 0{,}993]}$$

- **Conclusion**
  La fréquence observée appartient à l'intervalle, $f = 0{,}97 \in I$ donc le résultat du contrôle ne remet pas en question l'hypothèse, au seuil de 95%.

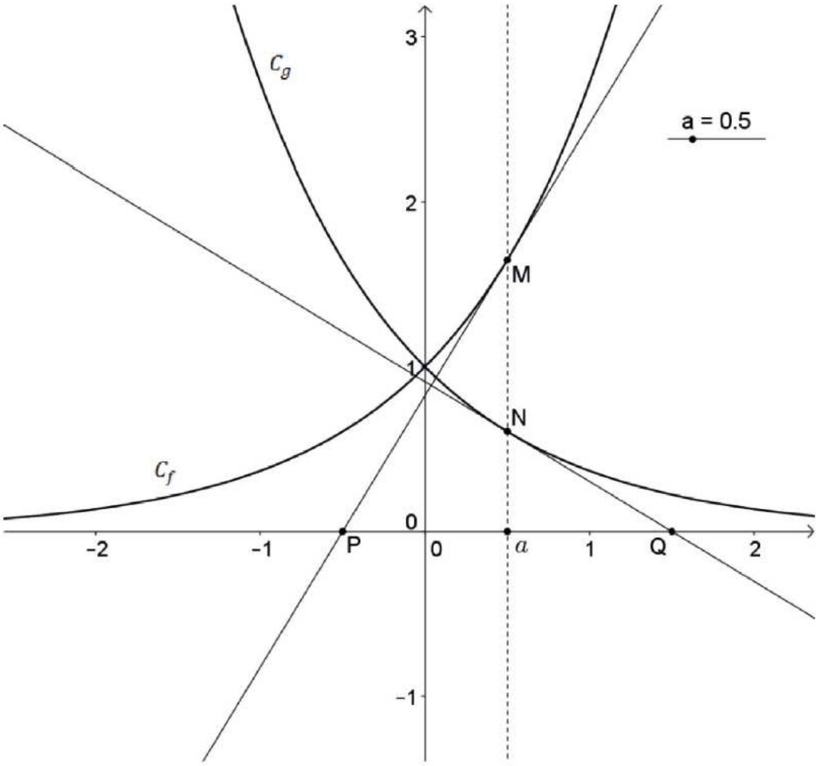
Exercice 3. 3 points

Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble R des nombres réels par

$$f(x) = e^x \text{ et } g(x) = e^{-x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_g$ celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan. Pour tout réel a, on note M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et N le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse a. La tangente en M à $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en P, la tangente en N à $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en Q. Á l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableur la longueur du segment [PQ] pour chacune de ces valeurs de a.



	A	B
1	Abscisse a	Longueur PQ
2	-3	2
3	-2.5	2
4	-2	2
5	-1.5	2
6	-1	2
7	-0.5	2
8	0	2
9	0.5	2
10	1	2
11	1.5	2
12	2	2
13	2.5	2
14		

1. Démontrer que la tangente en M à $\mathscr{C}_f$ est perpendiculaire à la tangente en N à $\mathscr{C}_g$.

Les fonctions f et g sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ de dérivées :

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \text{ et } g'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$$

De ce fait, le coefficient directeur de la tangente T_1 en M à $\mathscr{C}_f$ est $f'(a) = \mathrm{e}^a$ et le coefficient directeur de la tangente T_2 en N à $\mathscr{C}_g$ est $g'(a) = -\mathrm{e}^{-a}$.

Par conséquent un vecteur directeur de T_1 est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{e}^a\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de de T_2 est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{e}^{-a}\end{pmatrix}$.

Par produit scalaire on a :

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{e}^a\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{e}^{-a}\end{pmatrix} = 1 - \mathrm{e}^{a-a} = 1\,\mathrm{e}^0 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$$

Donc la tangente en M à $\mathscr{C}_f$ est perpendiculaire à la tangente en N à $\mathscr{C}_g$.

2.

2. a. Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?

Á l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableur la longueur du segment [PQ] pour chacune de ces valeurs de a. Ces valeurs semblent toutes être égales à 2, il semblerait que la longueur PQ soit toujours égale à 2.

2. b. Démontrer cette conjecture.

- L'équation de la tangente T_1 est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ soit

$$\begin{cases} f'(a) = \mathrm{e}^{a} \\ f(a) = \mathrm{e}^{a} \end{cases} \Longrightarrow y = \mathrm{e}^{a}(x-a) + \mathrm{e}^{a}$$

- L'abscisse x_P du point d'intersection P de T_1 avec l'axe des abscisse vérifie donc :

$$0 = \mathrm{e}^{a}(x_P - a) + \mathrm{e}^{a} \Longleftrightarrow x_P = \frac{-\mathrm{e}^{a} + a\mathrm{e}^{a}}{\mathrm{e}^{a}} = \underline{a-1}$$

- L'équation de la tangente T_2 est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ soit

$$\begin{cases} g'(a) = -\mathrm{e}^{-a} \\ f(a) = \mathrm{e}^{-a} \end{cases} \Longrightarrow y = -\mathrm{e}^{-a}(x-a) + \mathrm{e}^{-a}$$

- L'abscisse x_Q du point d'intersection Q de T_2 avec l'axe des abscisse vérifie donc :

$$0 = -\mathrm{e}^{-a}(x-a) + \mathrm{e}^{-a} \Longleftrightarrow x_Q = \frac{-\mathrm{e}^{-a} - a\mathrm{e}^{-a}}{-\mathrm{e}^{-a}} = \underline{a+1}$$

- Conclusion : On peut donc calculer la distance PQ

$$PQ = \left|x_Q - x_P\right| = |a+1-(a-1)| = 2$$

La longueur PQ est donc toujours égale à 2.

©ISSN 2272-5318

Exercice 4. Fonctions — 5 points

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation : $(E_n)\ :\ \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{n}$ *ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x.*

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On a donné en ANNEXE, qui n'est pas à rendre, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. **Étudier les variations de la fonction f.**

La fonction f est définie et dérivable surl'intervalle $]0\,;+\infty[$. Elle est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec :

$u(x)=\ln x$	$u'(x)=\dfrac{1}{x}$
$v(x)=x$	$v'(x)=1$

Pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$
$$f(x) = \frac{\frac{1}{x}\times(x)-(\ln x)\times(1)}{(x)^2}$$
$$f(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}$$

$$\underline{\forall x\in\,]0\,;+\infty[\,;}\ \boxed{f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}}$$

Le quotient est strictement dénominateur sur $]0\,;+\infty[$ donc f' est du signe du numérateur $(1-\ln x)$.

$$1-\ln x>0 \iff 1>\ln x$$

On compose par la fonction exponentielle qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, l'ordre est inchangé :

$$1-\ln x>0 \iff \mathrm{e}^1 > x$$

$$1-\ln x>0 \iff 1>\ln x$$

On compose par la fonction exponentielle qui est définie sur $\mathbb{R}$:

$$1-\ln x=0 \iff \mathrm{e}^1 = x$$

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖	↗	$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	↘	

Donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $]0\,;\mathrm{e}]$ et décroissante sur l'intervalle $[\mathrm{e}\,;+\infty[$.

2. Déterminer son maximum.

Son maximum est donc atteint pour $x = \mathrm{e}$ avec

$$f(\mathrm{e}) = \frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geq 3$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ notée α_n.

x	0		1		α		e		$+\infty$
Variations de f	‖	↗	0	↗	$\frac{1}{n}$	↗	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	↘	

- Notons que pour pour $n \geq 3$, on a $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
En effet en composant par la fonction inverse strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\begin{cases} n \geq 3 \Longrightarrow 0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{3} \\ 2 < \mathrm{e} \approx 2,718 < 3 \Longrightarrow \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{\mathrm{e}} < \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \Bigg| \quad n \geq 3 \Longrightarrow 0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$$

Théorème 2 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

***Remarque** : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- **Application du corollaire sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$:**
  - La fonction f est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$;
  - Le réel $k = \dfrac{1}{n}$ est compris entre $f(1) = 0$ et $f(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ puisque $n \geq 3$.
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
  l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une solution unique α_n sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$.

2. *D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geq 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n).*

2. a. Sur le graphique sont tracées les droites D3, D4 et D5. Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).

α_n est l'abscisse du point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et la droite D_n tel que α_n soit compris ente 1 et e. La suite (α_n) semble être décroissante.

2. b. Comparer, pour tout entier $n \geq 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$. Déterminer le sens de variation de la suite (α_n).

- On a pour tout entier $n \geq 3$, et par définition de α_n solution de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$:

$$f(\alpha_n) = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = f(\alpha_{n+1})$$

- La fonction f est strictement croissante sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ donc pour tout tout entier $n \geq 3$,

$$f(\alpha_n) > f(\alpha_{n+1}) \Longrightarrow \alpha_n > \alpha_{n+1}$$

- Conclusion : la suite (α_n) est donc décroissante pour $n \geq 3$.

2. c. En déduire que la suite (α_n) converge.

La suite (α_n) est donc décroissante .
En outre elle est minorée par 1 puisque d'après la question (B1) , $1 \leq \alpha_n \leq \mathrm{e}$.
La suite (α_n) converge donc vers une limite $L \geq 1$.

3. *On admet que, pour tout entier $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution notée β_n et telle que : $1 \leq \alpha_n \leq e \leq \beta_n$.*

3. a. On admet que la suite (β_n) est croissante. Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $\beta_n \geq n\dfrac{\beta_3}{3}$.

- On admet que, pour tout entier $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution notée β_n donc

$$f(\beta_n) = \frac{1}{n} \iff \frac{\ln \beta_n}{\beta_n} = \frac{1}{n} \iff \ln \beta_n = \frac{\beta_n}{n}$$

- On admet que la suite (β_n) est croissante donc tout tout entier $n \geq 3$,

$$\beta_{n+1} > \beta_n > \beta_3$$

On compose par la fonction ln qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ordre est inchangé :

$$\ln \beta_{n+1} > \ln \beta_n > \ln \beta_3$$

- On a donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$\left\{\begin{array}{l} \ln \beta_n = \dfrac{\beta_n}{n} \\ \ln \beta_n > \ln \beta_3 \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \frac{\beta_n}{n} \geq \frac{\beta_3}{3} \Longrightarrow \beta_n \geq n\frac{\beta_3}{3}$$

3. b. En déduire la limite de la suite (β_n).

- Puisque d'après les données, $\beta_3 > 0$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} n \times \frac{\beta_3}{3} = +\infty$$

- Or d'après la question précédente, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$\beta_n \geq n\frac{\beta_3}{3}$$

- D'après le théorème de comparaison

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n \to +\infty} n \times \frac{\beta_3}{3} = +\infty \\ \beta_n \geq n\dfrac{\beta_3}{3} \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \beta_n = +\infty$$

Exercice 5. Obligatoire : Espace — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. *On considère les points* $A(-1\,;\,2\,;\,0)$, $B(1\,;\,2\,;\,4)$ *et* $C(-1\,;\,1\,;\,1)$.

1.

1. a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$$\begin{cases} A(-1\,;\,2\,;\,0) \\ B(1\,;\,2\,;\,4) \\ C(-1\,;\,1\,;\,1) \end{cases} \implies \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}\,;\,\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et } \frac{0}{2}=0\neq\frac{1}{4}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, de ce fait les points A,B et C ne sont pas alignés.

1. b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}.\,\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=0+0+4=4$$

1. c. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.

- On a :

$$\begin{cases} AB=\sqrt{2^2+0^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\text{ u.l.} \\ AC=\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}\text{ u.l.} \end{cases}$$

- Par ailleurs :

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}\iff\overrightarrow{AB}\ \ \overrightarrow{AC}=2\sqrt{5}\times\sqrt{2}\times\cos\widehat{BAC}$$

- On a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}.\,\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=4 \\ \overrightarrow{AB}\ \ \overrightarrow{AC}=2\sqrt{10}\times\cos\widehat{BAC} \end{array}\right. \Bigg| \implies \cos\widehat{BAC}=\frac{4}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

- Pour conclure :

$$\boxed{\widehat{BAC}=\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}\approx 51°}$$

2. *Soit* $\vec{n}$ *le vecteur de coordonnées* $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

2. a. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Théorème 3

Un vecteur $\vec{u}$ est normal à un plan si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ non colinéaires de ce plan.

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}.\,\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}=4+0-4=0 \\ \vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}.\,\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=0+1-1=0 \end{array}\right. \Bigg| \implies \vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\text{ et }\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$$

Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) puisqu'il est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires de ce plan

2. b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Propriété 4

Soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} = 0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff a(x-x_A)+b\left(y-y_A\right)+c(z-z_A)=0$$

Donc d'après la propriété 4 avec $A(-1\,;\,2\,;\,0)$:

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (ABC) \iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z-0 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (ABC) \iff 2\times(x+1)-1\times(y-2)-1\times z=0$$

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (ABC) \iff 2x+2-y+2-z=0$$

$$\boxed{(ABC)\ :\ 2x-y-z+4=0}$$

3. *Soient P_1 le plan d'équation $3x+y-2z+3=0$ et P_2 le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x-2y+6=0$.*

3. a. Démontrer que le plan P_2 a pour équation $x=2z$.

Le plan P_2 est parallèle au plan d'équation $x-2z+6=0$ donc une équation cartésienne du plan P_2 est de la forme 4

$$P_2\ :\ x+2z+d=0$$

Or le point O appartient à ce plan donc :

$$0-0+d=0 \iff d=0$$

Une équation cartésienne de P_2 est donc $x-2z=0$ soit :

$$\underline{P_2\ :\ x=2z}$$

3. b. Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

Un vecteur normal au plan P_1 est $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal au plan P_2 est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les plans P_1 et P_2 sont sécants.

3. c. Soit la droite d dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x=2t \\ y=-4t-3 \\ z=t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Démontrer que d est l'intersection des plans P_1 et P_2.

Les plans P_1 et P_2 sont sécants d'après la question précédente et on a :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in P_1\cap P_2 \iff \begin{cases} 3x+y-2z+3=0 \\ x=2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x+y-2z+3=0 \\ x=2t \\ z=t \end{cases} \quad ,\ t\in\mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} 3\times 2t+y-2t+3=0 \\ x=2t \\ z=t \end{cases} \quad ,\ t\in\mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} x=2t \\ y=-4t-3 \\ z=t \end{cases} \quad ,\ t\in\mathbb{R}$$

Donc d est l'intersection des plans P_1 et P_2.

3. d. Démontrer que la droite d coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in d\cap(ABC) \iff \begin{cases} 2x-y-z+4=0 \\ x=2t \\ y=-4t-3 \\ z=t \end{cases} \quad ,\ t\in\mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} 2\times 2t-(-4t-3)-y+4=0 \\ x=2t \\ y=-4t-3 \\ z=t \end{cases} \quad ,\ t\in\mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} 4t+4t+3-t+4=0 \\ x=2t \\ y=-4t-3 \\ z=t \end{cases} \quad ,\ t\in\mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} t=-1 \\ x=2t \\ y=-4t-3 \\ z=t \end{cases} \quad ,\ t\in\mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} t=-1 \\ x=-2 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases} \quad ,\ t\in\mathbb{R}$$

La droite d coupe le plan (ABC) en un point $\underline{I(-2\,;\,1\,;\,-1)}$.

Exercice 5. Spécialité : Arithmétiques et suites — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité mathématiques

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 2\ u_n + 6$.

1. **Démontrer que, pour tout entier naturel n, $n_n = 9 \times 2^n - 6$.**

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(P_n)\ :\ u_n = 9 \times 2^n - 6$$

- **Initialisation**
Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ 9 \times 2^0 - 6 = 9 \times 1 - 6 = 3 \end{cases}$$

- **Hérédité**
Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

$$u_{n+1} = 2\ u_n + 6$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que $u_n = 9 \times 2^n - 6$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2\ \times \left(9 \times 2^n - 6\right) + 6 \\ &= 9 \times 2 \times 2^n - 12 + 6 \\ &= 9 \times \times 2^{n+1} - 6 \end{aligned}$$

On a alors montré que $u_{n+1} = 9 \times 2^{n+1} - 6$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.

- **Conclusion**
On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{u_n = 9 \times 2^n - 6}$$

2. **Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, u_n est divisible par 6.**

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} u_n &= 9 \times 2^n - 6 \\ u_n &= 9 \times 2 \times 2^{n-1} - 6 \\ u_n &= 18 \times 2^{n-1} - 6 \\ u_n &= 6 \times \left(\underbrace{3 \times 2^{n-1} - 1}_{\in \mathbb{N}}\right) \end{aligned}$$

or $n \geq 1$ donc 2^{n-1} est un entier supérieur ou égal à 1. Donc le facteur $\left(3 \times 2^{n-1} - 1\right)$ est un entier naturel et pour tout entier $n \geq 1$, u_n est divisible par 6. *On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \dfrac{u_n}{6}$.*

3. **On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ». Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.**

La calculatrice donne :

n	1	2	3	4	5	6	7
v_n	$\frac{12}{6} = 2$	$\frac{30}{6} = 5$	$\frac{66}{6} = 11$	$\frac{135}{6} = 23$	$\frac{282}{6} = 47$	$\frac{570}{6} = 95 = 5 \times 19$	$\frac{1146}{6} = 191$

On a donc $u_6 = \dfrac{570}{6} = 95 = 5 \times 19$ donc l'affirmation est fausse.

4.

4. a. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$.

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - 2v_n &= \frac{u_{n+1}}{6} - \frac{2u_n}{6} \\ &= \frac{9 \times 2^{n+1} - 6}{6} - \frac{2 \times 9 \times 2^n - 12}{6} \\ &= \frac{9 \times 2^{n+1} - 6 - 9 \times 2^{n+1} + 12}{6} \\ &= \frac{6}{6} = 1 \end{aligned}$$

Donc pour tout entier $n \geq 1$, $\underline{v_{n+1} - 2v_n = 1}$.

4. b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

Théorème 4 (Bézout, 1730-1883)

Deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux, si et seulement si,
il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

Soit :

$$\text{PGCD}\,(a\,;\ b) = 1 \iff \exists\,(u\,;\ v) \in \mathbb{Z}^2\ ;\ au + bv = 1$$

Remarque *: C'est le groupe Bourbaki qui donne vers 1948 le nom de Bézout à ce théorème qui en fait est énoncé et démontré par le mathématicien français Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638) dans ses « Problèmes plaisans et délectables » publié en 1624. Bézout démontre lui une généralisation de ce théorème aux polynômes en 1764 dans un mémoire présenté à l'académie des sciences.*

On vient de monter que pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$, ce qui peut s'écrire :

$$v_{n+1} \times 1 + v_n \times (-2) = 1$$

Donc d'après le théorème de Bezout cela signifie donc que les nombres v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

$$\exists\,(u\,;\ v) = (1\,;\ -2) \quad ; \quad v_{n+1} \times u + v_n \times v = 1 \Longrightarrow \text{PGCD}\,(v_{n+1}\,;\ v_n) = 1$$

4. c. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1}.

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{cases} u_n = 6 \times v_n \\ u_{n+1} = 6 \times v_{n+1} \end{cases} \Longrightarrow PGCD\,(u_n\,;u_{n+1}) = PGCD\,(6v_n\,;6v_{n+1})$$

Or par propriété du PGCD on a

Propriété 5

Pour tout entier k non nul et pour tout couple d'entiers non nuls $(a\,;\ b)$:

$$PGCD\,(ka;\,kb) = k \times PGCD\,(a;\,b)$$

De ce fait puisque $PGCD\,(v_n\,;v_{n+1}) = 1$:

$$\underline{PGCD\,(u_n\,;u_{n+1}) = 6 \times PGCD\,(v_n\,;v_{n+1}) = 6}$$

5.

5. a. Vérifier que $2^4 \equiv 1\,[5]$.

$$2^4 = 16 = 5 \times 3 + 1 \Longrightarrow \underline{2^4 \equiv 1\,[5]}$$

©ISSN 2272-5318

5. b. En déduire que si n est de la forme $4k+2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.

Si n est de la forme $4k+2$ avec k entier naturel, alors

$$u_n = 9\times 2^n - 6$$
$$u_n = 9\times 2^{4k+2} - 6$$
$$u_n = 9\times 2^{4k}\times 2^2 - 6$$
$$u_n = 9\times \left(2^4\right)^k\times 2^2 - 6$$

Or on vient de montrer que $2^4 \equiv 1 \quad [5]$ donc :

$$\begin{aligned} u_n = 9\times \left(2^4\right)^k\times 2^2 - 6 &\iff u_n \equiv 9\times (1)^k\times 2^2 - 6 \quad [5]\\ &\iff u_n \equiv 9\times 4 - 6 \quad [5]\\ &\iff u_n \equiv 30 \quad [5]\\ &\iff u_n \equiv 0 \quad [5]\end{aligned}$$

Donc on vient de prouver que si n est de la forme $4k+2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.

5. c. Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ?

- Si n est de la forme $4k$ avec k entier naturel, alors

$$u_n = 9\times 2^n - 6$$
$$u_n = 9\times 2^{4k} - 6$$
$$u_n = 9\times \left(2^4\right)^k - 6$$

  Or on vient de montrer que $2^4 \equiv 1 \quad [5]$ donc :

$$\begin{aligned} u_n = 9\times \left(2^4\right)^k - 6 &\iff u_n \equiv 9\times (1)^k - 6 \quad [5]\\ &\iff u_n \equiv 9 - 6 \quad [5]\\ &\iff u_n \equiv 3 \quad [5]\end{aligned}$$

  Donc u_n n'est pas divisible par 5.

- Si n est de la forme $4k+1$ avec k entier naturel, alors

$$u_n = 9\times 2^n - 6$$
$$u_n = 9\times 2^{4k+1} - 6$$
$$u_n = 18\times \left(2^4\right)^k - 6$$

  Or on vient de montrer que $2^4 \equiv 1 \quad [5]$ donc :

$$\begin{aligned} u_n = 18\times \left(2^4\right)^k - 6 &\iff u_n \equiv 18\times (1)^k - 6 \quad [5]\\ &\iff u_n \equiv 18 - 6 \quad [5]\\ &\iff u_n \equiv 12 \quad [5] \equiv 2 \quad [5]\end{aligned}$$

  Donc u_n n'est pas divisible par 5.

- Si n est de la forme $4k+3$ avec k entier naturel, alors

$$u_n = 9\times 2^n - 6$$
$$u_n = 9\times 2^{4k+3} - 6$$
$$u_n = 9\times 2^3\times \left(2^4\right)^k - 6$$

  Or on vient de montrer que $2^4 \equiv 1 \quad [5]$ donc :

$$\begin{aligned} u_n = 72\times \left(2^4\right)^k - 6 &\iff u_n \equiv 72\times (1)^k - 6 \quad [5]\\ &\iff u_n \equiv 72 - 6 \quad [5]\\ &\iff u_n \equiv 66 \quad [5] \equiv 1 \quad [5]\end{aligned}$$

  Donc u_n n'est pas divisible par 5.

- Conclusion : par conséquent u_n n'est pas divisible par 5 pour les autres valeurs de n.

Fin du devoir