

Correction Baccalauréat S - Spé. Maths Amérique du Nord - 30 Mai 2013

www.math93.com

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité maths

Exercice 1.

5 points

Commun à tous les candidats

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points $A(0; 4; 1)$, $B(1; 3; 0)$, $C(2; -1; -2)$ et $D(7; -1; 4)$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$\vec{AB}(1; -1; -1)$, $\vec{AC}(2; -5; -3)$.

Les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 3)$.

a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

On a :

$$\bullet \vec{u} \cdot \vec{AC} = 2 \times 1 + (-1) \times (-1) + 3 \times (-1) = 0;$$

$$\bullet \vec{u} \cdot \vec{AB} = 2 \times 2 + (-1) \times (-5) + 3 \times (-3) = 0.$$

Donc le vecteur $\vec{u}(2; -1; 3)$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), donc il est normal au plan (ABC). La droite Δ est bien orthogonale au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

Le plan (ABC) est donc l'ensemble des points $M(x, y, z)$ qui vérifient $\vec{AM}(x; y-4; z-1) \cdot \vec{u}(2; -1; 3) = 0$

Ce qui nous donne $\boxed{(ABC) : 2x - y + 3z + 1 = 0}$

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

La droite Δ est constituée de l'ensemble des points $M(x, y, z)$ qui vérifient :

$$\vec{DM}(x-7; y+1; z-4) = k\vec{u}(2; -1; 3)$$

Ce qui nous donne :

$$\Delta : \begin{cases} x &= 2k+7 \\ y &= -k-1 \\ z &= 3k+4 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

Il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} x &= 2k+7 \\ y &= -k-1 \\ z &= 3k+4 \\ 2x - y + 3z + 1 &= 0 \end{cases},$$

On remplaçant x, y et z dans l'équation du plan (ABC) on obtient : $2(2k+7) - (-k-1) + 3(3k+4) + 1 = 0$, et donc $14k + 28 = 0$ soit $k = -2$.

En remplaçant k par -2 on obtient les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC), $\boxed{H(3; 1; -2)}$.

3. Soit \mathcal{P}_1 le plan d'équation $x + y + z = 0$ et \mathcal{P}_2 le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.

a. Démontrer que les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants.

Des vecteurs normaux aux plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont respectivement $\vec{n}_1(1; 1; 1)$ et $\vec{n}_2(1; 4; 0)$. Or ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants.

b. Vérifier que la droite d , intersection des plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 , a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Le plus simple ici, sachant que les plans sont sécants, de vérifier que cette droite appartient bien aux deux plans en remplaçant x par $-4t - 2$, y par t et z par $3t + 2$ dans les deux équations.

– Pour $\mathcal{P}_1 : x + y + z = 0$ on a $(-4t - 2) + t + (3t + 2) = 0$;

– Pour $\mathcal{P}_2 : x + 4y + 2 = 0$ on a $(-4t - 2) + 4t + 2 = 0$.

Donc la droite d , est l'intersection des plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 .

c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Par lecture sur la représentation paramétrique de la droite d , un vecteur directeur de d est $\vec{v}_d(-4 ; 1 ; 3)$.

On calcule alors le produit scalaire de \vec{v}_d avec le vecteur \vec{u} , un vecteur normal à (ABC).

$$\vec{v}_d(-4 ; 1 ; 3) \cdot \vec{u}(2 ; -1 ; 3) = 0.$$

Donc \vec{v}_d et \vec{u} sont orthogonaux, ce qui montre que la droite d est parallèle au plan (ABC).

Exercice 2.

5 points

Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a est un entier naturel b est un entier naturel c est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à c la valeur 0 Demander la valeur de a Demander la valeur de b
Traitement :	Tant que $a > b$ Affecter à c la valeur $c + 1$ Affecter à a la valeur $a - b$ Fin de tant que
Sortie :	Afficher c Afficher a

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.Étape 0 : $a = 13$, $c = 0$ et $b = 4$;Étape 1 : $a = 13 > b = 4$ donc $a = 13 - 4 = 9$, $c = 0 + 1 = 1$;Étape 2 : $a = 9 > b = 4$ donc $a = 9 - 4 = 5$, $c = 1 + 1 = 2$;Étape 3 : $a = 5 > b = 4$ donc $a = 5 - 4 = 1$, $c = 2 + 1 = 3$;Étape 4 : $a = 1 < b = 4$ donc on sort de la boucle et on affiche $a = 1$, $c = 3$;

2. Que permet de calculer cet algorithme ?

Cet algorithme permet, en modifiant le Tant que $a > b$ en Tant que $a \geq b$, de calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b .

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m + 5$ par 26 et on le note p .Étape 3 : Au nombre p , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.

Étape 1 : À la lettre U, on associe le nombre $m = 20$.Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m + 5 = 185$ par 26 soit $185 = 7 \times 26 + 3$ donc $p = 3 \equiv 185 \pmod{26}$.Étape 3 : Au nombre p , on associe la lettre correspondante dans le tableau soit D.2. Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p , calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Variables :	a est un entier naturel c est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à c la valeur 0 Demander la valeur de a Affecter à a la valeur de $9 \times a + 5$
Traitement :	Tant que $a \geq 26$ Affecter à c la valeur $c + 1$ Affecter à a la valeur $a - 26$ Fin de tant que
Sortie :	Afficher a

Partie C

1. **Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1 \pmod{26}$.**

On peut prendre $x = 3$ et alors on a $9x = 27 \equiv 1 \pmod{26}$

2. **Démontrer alors l'équivalence : $9m + 5 \equiv p \pmod{26} \iff m \equiv 3p - 15 \pmod{26}$.**

$$9m + 5 \equiv p \pmod{26} \iff 3 \times (9m + 5) \equiv 3p \pmod{26}$$

$$9m + 5 \equiv p \pmod{26} \iff \underbrace{3 \times 9}_{= 27} \times m + 15 \equiv 3p \pmod{26}$$

Or on a vu que $9 \times 3 \equiv 1 \pmod{26}$, donc

$$9m + 5 \equiv p \pmod{26} \iff m + 15 \equiv 3p \pmod{26}$$

Et donc

$$\boxed{9m + 5 \equiv p \pmod{26} \iff m \equiv 3p - 15 \pmod{26}}$$

3. **Décoder alors la lettre B.**

– La lettre B est codée par $p = 1$;

– D'après la question précédente on a :

$$9m + 5 \equiv p \pmod{26} \iff m \equiv 3p - 15 \pmod{26}, \text{ soit}$$

$$9m + 5 \equiv 1 \pmod{26} \iff m \equiv 3 \times 1 - 15 \pmod{26}$$

$$\text{Soit } m \equiv -12 \pmod{26}.$$

– Or $m \equiv -12 \pmod{26} \equiv 14 \pmod{26}$;

– **Donc la lettre B a été obtenue en codant la lettre O qui correspond à $m = 14$.**

Exercice 3.

5 points

Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leq x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $P(390 \leq X \leq 410)$.

$$\begin{aligned} P(390 \leq X \leq 410) &= P(X \leq 410) - P(X \leq 390) \\ &\approx 0,818 - 0,182 \end{aligned}$$

Et donc $P(390 \leq X \leq 410) \approx 0,636$.

2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.

Un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable donc la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable est $p = P(X \geq 385) = 1 - P(X < 385)$.

Donc $p = 1 - P(X < 385) \approx 1 - 0,086$ soit $p \approx 0,914 = 91,4\%$.

3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ .

Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96% ? On arrondira le résultat au dixième.

On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leq -1,751) \approx 0,040 = 4\%$.

La variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type σ , on sait qu'alors la variable aléatoire $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

Or on cherche σ pour que la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable devienne $p = P(X \geq 385) = 96\%$.

$$\text{Soit } p = P(X \geq 385) = P\left(Z = \frac{X - 400}{\sigma} \geq \frac{385 - 400}{\sigma}\right) = 96\%$$

$$\text{Et donc } p = P\left(Z \geq \frac{-15}{\sigma}\right) = 96\%$$

$$\text{Puis } p = 1 - P\left(Z < \frac{-15}{\sigma}\right) = 96\%$$

$$\text{Et donc } \sigma \text{ vérifie l'égalité } P\left(Z < \frac{-15}{\sigma}\right) = 4\%.$$

Sachant que $P(Z \leq -1,751) \approx 0,040 = 4\%$, on en déduit alors que $\sigma = \frac{-15}{-1,751} \approx 8,5$ arrondi au dixième.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96% de pains commercialisables.

Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.

On a $n = 300$, $p = 96\%$ alors on sait que puisque $n = 300 \geq 30$, $np = 288 \geq 5$ et $n(1-p) = 12 \geq 5$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% pour la fréquence $\frac{X}{300}$ est :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \text{ soit } \boxed{I \approx [0,9378 ; 0,9822]}.$$

2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables. Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

La fréquence $f = \frac{283}{300} \approx 0,943 \in I$ donc l'objectif est atteint.

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millièm.

On a donc $P(T \geq 30) = 0,913$ donc $e^{-30\lambda} = 0,913$ soit $-30\lambda = \ln 0,913$ et donc $\lambda = \frac{\ln 0,913}{-30} \approx 0,003$.

Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0,003$.

2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?

On cherche donc $P_{T \geq 60}(T \geq 90)$.

Or d'après le cours, la loi exponentielle est la loi de durée de vie sans vieillissement (ou loi sans mémoire) et donc $P_{T \geq s}(T \geq s+t) = P(T \geq t)$

De ce fait on a ici,

$$P_{T \geq 60}(T \geq 90) = P_{T \geq 60}(T \geq 60 + 30) = P(T \geq 30)$$

On peut refaire la démonstration qui suit où directement appliquer le cours ;

$$P_{T \geq 60}(T \geq 90) = P(T \geq 30) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{30}^t 0,003 e^{-0,003x} dx$$

$$P_{T \geq 60}(T \geq 90) = P(T \geq 30) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [-e^{-0,003x}]_{30}^t$$

$$P_{T \geq 60}(T \geq 90) = P(T \geq 30) = e^{-0,003 \times 30}$$

$$\text{Et donc } \boxed{P_{T \geq 60}(T \geq 90) = e^{-0,09} \approx 91,40\%}.$$

3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

On a $P(T \geq 365) = e^{-0,003 \times 365} \approx 33,45\%$, le vendeur a donc tort.

On cherche alors l'entier n tel que $P(T \geq n) = 0,5$ soit $e^{-0,003 \times n} = 0,5$.

$$\text{On obtient facilement } \boxed{n = \frac{\ln 0,5}{-0,003} \approx 231,05}.$$

La balance a une chance sur deux de ne pas se dérégler avant 232 jours.

Exercice 4.

5 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

et soit \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.1. a. Étudier la limite de f en 0.

On a :

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty;$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \ln x = -\infty.$$

$$\text{Or } f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \times (1 + \ln x) \text{ donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty}$$

b. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$- \text{D'après le théorème des croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0;$$

$$- \text{De plus } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

$$\text{Or } f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x} \text{ donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe \mathcal{C} .

$$- \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \text{ donc } \mathcal{C} \text{ possède une asymptote verticale d'équation } x = 0.$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ donc } \mathcal{C} \text{ possède une asymptote horizontale d'équation } y = 0 \text{ en } +\infty.$$

2. a. Dérivée.

Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, la fonction \ln est définie et le dénominateur ne s'annule pas, donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$.La fonction f est de la forme $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 1 + \ln x$ et $v(x) = x^2$.On obtient $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 2x$;

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - (1 + \ln x) \times 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x - 2x}{x^4}$$

$$\text{Donc } \forall x \in]0; +\infty[, \boxed{f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3}}.$$

b. Résoudre sur l'intervalle $]0; +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2 \ln(x) > 0$.

$$-1 - 2 \ln(x) > 0 \iff -1 > 2 \ln(x)$$

$$-1 - 2 \ln(x) > 0 \iff -\frac{1}{2} > \ln(x)$$

$$-1 - 2 \ln(x) > 0 \iff e^{-\frac{1}{2}} > x \text{ car la fonction } x \mapsto e^x \text{ est croissante sur } \mathbb{R}$$

$$\text{Donc les solutions de l'inéquation sont les réels de l'intervalle : } \boxed{\mathcal{S} =]0; e^{-\frac{1}{2}}[}$$

c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.Sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $-1 - 2 \ln(x)$ donc, d'après la question précédente, $f'(x)$ est positive sur $]0; e^{-\frac{1}{2}}[$ et négative ailleurs.d. Dresser le tableau des variations de la fonction f .

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$\frac{e}{2}$	0

3. a. **Démontrer que la courbe \mathcal{C} a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.**

$$f(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \text{ soit } x = e^{-1}.$$

La courbe \mathcal{C} a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, le point $A(e^{-1}; 0)$.

- b. **En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.**

Le tableau de variations montre alors que $f(x)$ est positif sur $]e^{-1}; +\infty[$ et négatif sur $]0; e^{-1}[$.

4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$.

- a. **Démontrer que $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$.**

- D'après la question précédente, la fonction f est au dessus de l'axe des abscisse sur l'intervalle $]e^{-1}; 2[$ car $f(x)$ y est positif.

$$\text{De ce fait, } 0 \leq I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^2 f(x) dx$$

- Or sur l'intervalle $]e^{-1}; 2[$, on a : $\forall x \in]e^{-1}; 2[, f(x) \leq f(e^{-\frac{1}{2}}) = \frac{e}{2}$

$$\text{Donc } I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^2 f(x) dx \leq \int_{\frac{1}{e}}^2 \frac{e}{2} dx = \frac{e}{2} \times \left(2 - \frac{1}{e}\right) = e - \frac{1}{2}.$$

On a donc montré que $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$.

On admet que la fonction F , définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{-2 - \ln(x)}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

- b. **Calculer I_n en fonction de n .**

$$I_n = \int_{e^{-1}}^n f(x) dx = [F(x)]_{e^{-1}}^n = \left[\frac{-2 - \ln(x)}{x} \right]_{e^{-1}}^n = \frac{-2 - \ln(n)}{n} - (-2 + 1) \times e$$

$$\text{On a donc } I_n = \frac{-2 - \ln(n)}{n} + e$$

- c. **Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.**

- D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$;

- De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$.

$$\text{Or } I_n = -\frac{2}{n} - \frac{\ln n}{n} + e \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = e.$$

Cela signifie donc que l'aire comprises sous la courbe et l'axe des abscisses pour des valeurs de x plus grandes que e^{-1} vaut e unités d'aire.