Corrigé du Baccalauréat S - Obligatoire
Amérique du Nord - 30 Mai 2013

`www.math93.com`

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité maths

Exercice 1. **5 points**

Commun à tous les candidats

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. **Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés**.
   $\overrightarrow{AB}\,(1\,;\,-1\,;\,-1)$, $\overrightarrow{AC}\,(2\,;\,-5\,;\,-3)$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$.
   a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   On a :
   - $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 1 + (-1)\times(-1) + 3\times(-1) = 0$;
   - $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times 2 + (-1)\times(-5) + 3\times(-3) = 0$.

   Donc le vecteur $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), donc il est normal au plan (ABC). La droite Δ est bien orthogonale au plan (ABC).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   Le plan (ABC) est donc l'ensemble des points $M(x,y,z)$ qui vérifient $\overrightarrow{AM}\,(x\,;\,y-4\,;\,z-1).\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)=0$
   Ce qui nous donne $\boxed{(\text{ABC}) : 2x-y+3z+1=0}$

   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   La droite Δ est constituée de l'ensemble des points $M(x,y,z)$ qui vérifient :
   $\overrightarrow{DM}\,(x-7\,;\,y+1\,;\,z-4) = k\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$
   Ce qui nous donne :
   $$\Delta : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2k+7 \\ y & = & -k-1 \\ z & = & 3k+4 \end{array}\right. ,\ k\in\mathbb{R}$$

   d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
   Il s'agit de résoudre le système :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2k+7 \\ y & = & -k-1 \\ z & = & 3k+4 \\ 2x-y+3z+1 & = & 0 \end{array}\right. ,$$
   On remplaçant x, y et z dans l'équation du plan (ABC) on obtient : $2(2k+7)-(-k-1)+3(3k+4)+1=0$, et donc $14k+28=0$ soit $k=-2$.
   En remplaçant k par -2 on obtient les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC), $\boxed{H\,(3\,;\,1\,;\,-2)}$.

3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.
   a. Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
   Des vecteurs normaux aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont respectivement $\vec{n}_1\,(1\,;\,1\,;\,1)$ et $\vec{n}_2\,(1\,;\,4\,;\,0)$. Or ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

b. Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -4t-2 \\ y & = & t \\ z & = & 3t+2 \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R}$$

.

Le plus simple ici, sachant que les plans sont sécants, de vérifier que cette droite appartient bien aux deux plans en remplaçant x par $-4t-2$, y par t et z par $3t+2$ dans les deux équations.

– Pour $\mathscr{P}_1 : x+y+z=0$ on a $(-4t-2)+t+(3t+2)=0$;
– Pour $\mathscr{P}_2 : x+4y+2=0$ on a $(-4t-2)+4t+2=0$.

Donc la droite d, est l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Par lecture sur la représentation paramétrique de la droite d, un vecteur directeur de d est $\vec{v}_d\,(-4\,;\,1\,;\,3)$.
On calcule alors le produit scalaire de $\vec{v}_d$ avec le vecteur $\overrightarrow{u}$, un vecteur normal à (ABC).
$\vec{v}_d\,(-4\,;\,1\,;\,3).\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)=0$.
Donc $\vec{v}_d$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux, ce qui montre que la droite d est parallèle au plan (ABC).

Exercice 2. **5 points**

Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

Étape 0 : $n = 3$, $u = 1$

Étape 1 : $i = 1 \Rightarrow u = \sqrt{2\times 1} = \sqrt{2}$;

Étape 2 : $i = 2 \Rightarrow u = \sqrt{2\times\sqrt{2}}$;

Étape 3 : $i = 3 \Rightarrow u = \sqrt{2\times\sqrt{2\times\sqrt{2}}}$.

On sort de la boucle et on affiche $\boxed{u = \sqrt{2\times\sqrt{2\times\sqrt{2}}} \approx 1,8340}$.

b. Que permet de calculer cet algorithme ?

L'algorithme nous donne la $n^{ième}$ valeur de la suite (u_n).

c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,915 2	1,927 2	1,999 9	1,999 9

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

Il semblerait que la suite (u_n) soit positive, croissante et tende vers 2.

2. a. Montrons par récurrence sur n la propriété (P_n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leqslant 2$.

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $0 < u_0 = 1 \leqslant 2$
- **Hérédité** : Supposons que, pour n fixé, (P_n) soit vraie : $0 < u_n \leqslant 2$;

  Alors $0 < 2u_n \leqslant 2$: en multipliant par 2 ;

  Puis $0 < \sqrt{2u_n} \leqslant \sqrt{2}$: car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$;

  Soit $0 < u_{n+1} \leqslant \sqrt{2} < 2$: (P_{n+1})
- **Conclusion** : La propriété est vraie au rang 0, et, en la supposant vraie au rang n, elle reste vraie au rang suivant. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leqslant 2}$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n} - u_n = \sqrt{u_n}\left(\sqrt{2} - \sqrt{u_n}\right)$

$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}\left(\dfrac{\left(\sqrt{2} - \sqrt{u_n}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{u_n}\right)}{\sqrt{2} + \sqrt{u_n}}\right)$, en multipliant par l'expression conjuguée $\left(\sqrt{2} + \sqrt{u_n}\right)$;

$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}\left(\dfrac{2 - u_n}{\sqrt{2} + \sqrt{u_n}}\right)$

Or $\sqrt{u_n}$ et le dénominateur $\left(\sqrt{2} + \sqrt{u_n}\right)$ sont positifs et $2 - u_n \geq 0$ d'après la question précédente.

De ce fait, pour tout entier n, $u_{n+1} \geq u_n$, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est donc croissante}}$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2, donc elle est convergent vers le réel l, $0 \leq l \leq 2$.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

$v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2$
$v_{n+1} = \ln \sqrt{2u_n} - \ln 2 = \ln (2u_n)^{\frac{1}{2}} - \ln 2$
$v_{n+1} = \frac{1}{2} \ln (2u_n) - \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln u_n - \ln 2$
$v_{n+1} = \frac{1}{2} \ln u_n - \frac{1}{2} \ln 2$
$v_{n+1} = \frac{1}{2} (\ln u_n - \ln 2) = \frac{1}{2} v_n$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln u_0 - \ln 2 = -\ln 2$

b. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

– On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n = -\ln 2 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
– Et donc $\forall n \in \mathbb{N}$,
$\ln u_n = v_n + \ln 2 = -\ln 2 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \ln 2$;
$u_n = \mathrm{e}^{-\ln 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \ln 2}$, soit $\boxed{u_n = 2\mathrm{e}^{-\ln 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n}}$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} -\ln 2 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\ln 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \mathrm{e}^0 = 1$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2}$

d. Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que $u \leq 1,999$
	u prend la valeur $\sqrt{2u}$
	n prend la valeur $n+1$
	Fin de Tant que
Sortie :	Afficher n

Exercice 3. **5 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A. B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.
La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leqslant x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. **Calculer** $P(390 \leqslant X \leqslant 410)$.
$$\begin{array}{rcl} P(390 \leqslant X \leqslant 410) & = & P(X \leqslant 410) - P(X \leqslant 390) \\ & \approx & 0,818 - 0,182 \end{array}$$
Et donc $\boxed{P(390 \leqslant X \leqslant 410) \approx 0,636}$.

2. **Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.**
Un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable donc la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable est $p = P(X \geq 385) = 1 - P(X < 385)$.
Donc $p = 1 - P(X < 385) \simeq 1 - 0,086$ soit $\boxed{p \approx 0,914 = 91,4\%}$.

3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.
Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.
On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leqslant -1,751) \approx 0,040 = 4\%$.

   La variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type σ, on sait qu'alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.
Or on cherche σ pour que la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable devienne $p = P(X \geq 385) = 96\%$.
$$\begin{array}{lll} \text{Soit} & p = & P(X \geq 385) = P\left(Z = \dfrac{X-400}{\sigma} \geq \dfrac{385-400}{\sigma}\right) = 96\% \\ \text{Et donc} & p = & P\left(Z \geq \dfrac{-15}{\sigma}\right) = 96\% \\ \text{Puis} & p = & 1 - P\left(Z < \dfrac{-15}{\sigma}\right) = 96\% \end{array}$$
Et donc σ vérifie l'égalité $P\left(Z < \dfrac{-15}{\sigma}\right) = 4\%$.

   Sachant que $P(Z \leqslant -1,751) \approx 0,040 = 4\%$, on en déduit alors que $\boxed{\sigma = \dfrac{-15}{-1,751} \approx 8,5}$ arrondi au dixième.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.
Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. **Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300**.
On a $n = 300$, $p = 96\%$ alors on sait que puisque $n = 300 \geq 30$, $np = 288 \geq 5$ et $n(1-p) = 12 \geq 5$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% pour la fréquence $\dfrac{X}{300}$ est :
$I = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ soit $\boxed{I \approx [0,9378\ ;\ 0,9822]}$.
2. **Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables. Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint** ?
La fréquence $\boxed{f = \dfrac{283}{300} \approx 0,943 \in I}$ donc l'objectif est atteint.

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. **On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de $0,913$. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.**

   On a donc $P(T \geq 30) = 0,913$ donc $e^{-30\lambda} = 0,913$ soit $-30\lambda = \ln 0,913$ et donc $\boxed{\lambda = \dfrac{\ln 0,913}{-30} \approx 0,003}$.

   Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0,003$.

2. **Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours** ?
   On cherche donc $P_{T\geq 60}(T \geq 90)$.
   Or d'après le cours, la loi exponentielle est la loi de durée de vie sans vieillissement (ou loi sans mémoire) et donc $P_{T\geq s}(T \geq s+t) = P(T \geq t)$

   De ce fait on a ici,
   $P_{T\geq 60}(T \geq 90) = P_{T\geq 60}(T \geq 60+30) = P(T \geq 30)$
   On peut refaire la démonstration qui suit où directement appliquer le cours ;

   $P_{T\geq 60}(T \geq 90) = P(T \geq 30) = \lim\limits_{t\to+\infty} \displaystyle\int_{30}^{t} 0,003e^{-0,003x}\,dx$
   $P_{T\geq 60}(T \geq 90) = P(T \geq 30) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left[-e^{-0,003x}\right]_{30}^{t}$
   $P_{T\geq 60}(T \geq 90) = P(T \geq 30) = e^{-0,003\times 30}$
   Et donc $\boxed{P_{T\geq 60}(T \geq 90) = e^{-0,09} \approx 91,40\%}$.

3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. **A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai** ?
   On a $P(T \geq 365) = e^{-0,003\times 365} \approx 33,45\%$, le vendeur a donc tort.
   On cherche alors l'entier n tel que $P(T \geq n) = 0,5$ soit $e^{-0,003\times n} = 0,5$.
   On obtient facilement $\boxed{n = \dfrac{\ln 0,5}{-0,003} \approx 231,05}$.

   La balance a une chance sur deux de ne pas se dérégler avant 232 jours.

Exercice 4. **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1. **a.** **Étudier la limite de f en** 0.

On a :

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$;
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}1+\ln x=-\infty$.

Or $f(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}\times(1+\ln x)$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=-\infty}$

b. **Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.**

- D'après le théorème des croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$;
- De plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

Or $f(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\times\dfrac{\ln x}{x}$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$

c. **En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.**

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=-\infty$ donc $\mathscr{C}$ **possède une asymptote verticale d'équation** $x=0$.
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ donc $\mathscr{C}$ **possède une asymptote horizontale d'équation** $y=0$ **en** $+\infty$.

2. **a.** **Dérivée**.

Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction ln est définie et le dénominateur ne s'annule pas, donc f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

La fonction f est de la forme $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=1+\ln x$ et $v(x)=x^2$.

On obtient $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v'(x)=2x$;

Donc $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}=\dfrac{\frac{1}{x}\times x^2-(1+\ln x)\times 2x}{x^4}=\dfrac{x-2x\ln x-2x}{x^4}$

Donc $\forall x\in]0\,;\,+\infty[$, $\boxed{f'(x)=\dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}}$.

b. **Résoudre sur l'intervalle** $]0\,;\,+\infty[$ **l'inéquation** $-1-2\ln(x)>0$.

$-1-2\ln(x)>0\iff -1>2\ln(x)$

$-1-2\ln(x)>0\iff -\frac{1}{2}>\ln(x)$

$-1-2\ln(x)>0\iff \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}>x$ car la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$

Donc les solutions de l'inéquation sont les réels de l'intervalle : $\boxed{\mathscr{S}=\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right[}$.

c. **En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle** $]0\,;\,+\infty[$.

Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $-1-2\ln(x)$ donc, d'après la question précédente, $f'(x)$ est positive sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right[$ et négative ailleurs.

d. **Dresser le tableau des variations de la fonction f.**

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	0

3. a. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

$f(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0$ soit $x = e^{-1}$.

La courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, le point $\boxed{A\left(e^{-1}\ ;\ 0\right)}$.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Le tableau de variations montre alors que $f(x)$ est positif sur $]e^{-1}\ ;\ +\infty[$ et négatif sur $]0\ ;\ e^{-1}[$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$.

a. Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant e - \frac{1}{2}$.

– D'après la question précédente, la fonction f est au dessus de l'axe des abscisse sur l'intervalle $]e^{-1}\ ;\ 2[$ car $f(x)$ y est positif.
De ce fait, $0 \leq I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{2} f(x)\,dx$

– Or sur l'intervalle $]e^{-1}\ ;\ 2[$, on a : $\forall x \in]e^{-1}\ ;\ 2[, f(x) \leq f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{e}{2}$
Donc $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{2} f(x)\,dx \leq \int_{\frac{1}{e}}^{2} \frac{e}{2}\,dx = \frac{e}{2} \times \left(2 - \frac{1}{e}\right) = e - \frac{1}{2}$.

On a donc montré que $\boxed{0 \leqslant I_2 \leqslant e - \frac{1}{2}}$.

On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = \frac{-2 - \ln(x)}{x}$,est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

b. Calculer I_n en fonction de n.

$$I_n = \int_{e^{-1}}^{n} f(x)\,dx = [F(x)]_{e^{-1}}^{n} = \left[\frac{-2 - \ln(x)}{x}\right]_{e^{-1}}^{n} = \frac{-2 - \ln(n)}{n} - (-2 + 1) \times e$$

On a donc $\boxed{I_n = \frac{-2 - \ln(n)}{n} + e}$

c. Étudier la limite de In en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

– D'après le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$;

– De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$.

Or $I_n = -\frac{2}{n} - \frac{\ln n}{n} + e$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = e}$.

Cela signifie donc que l'aire comprises sous la courbe et l'axe des abscisses pour des valeurs de x plus grandes que e^{-1} vaut e unités d'aire.