Math93.com

Baccalauréat 2017 - ES/L Centres Étrangers

Série ES/L Obli. et Spé.
13 Juin 2017
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. QCM — 4 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Question 1 (Réponse b)

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[1\,;\,9]$, alors :

a. $p(1 < X < 9) = \dfrac{1}{8}$ **b.** $\boxed{p(5 < X < 9) = \dfrac{1}{2}}$ **c.** $p(1 < X < 3) = \dfrac{3}{8}$ **d.** $p(1 < X < 2) = \dfrac{1}{2}$

Preuve.

Propriété 1

Soit X la variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$. Pour tout c et d de l'intervalle $[a; b]$ avec $c < d$ on a :

$$\boxed{P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}} \ : \ (1) \quad \text{et} \quad \boxed{E(X) = \frac{b+a}{2}} \ : \ (2)$$

La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[1\,;\,9]$ donc on a :

$$p(5 < X < 9) = \frac{9-5}{9-1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Question 2 (Réponse d)

Une enquête sanitaire a pour objectif d'estimer la proportion de personnes qui respectent le calendrier de vaccinations préconisé par le Haut Conseil de la Santé Publique. Pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude $0,01$ au niveau de confiance $0,95$ de cette proportion, il faut interroger :

a. 200 personnes **b.** 400 personnes **c.** 10 000 personnes $\boxed{\textbf{d. } 40\,000 \text{ personnes}}$

Preuve.
Si f représente la fréquence du caractère étudié dans un échantillon de taille n, alors si les condition sont vérifiées , l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 %, est donné par :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Donc son amplitude est : $A = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$. On cherche donc un entier n strictement positif tel que $\dfrac{2}{\sqrt{n} =} \leq 0,01$. En composant par la fonction inverse strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on obtient :

$$\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,01 \iff \frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{1}{0,01} \iff \sqrt{n} = \frac{2}{0,01} = 200$$

Et puisque n est positif, on obtient en composant par la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+^*$: $\underline{n = 40\,000}$.

Question 3 (Réponse c)

La solution de l'équation $x^{23} = 92$ est égale à :

a. 4 **b.** 1,2 $\boxed{\textbf{c. } \mathrm{e}^{\frac{\ln(92)}{23}}}$ **d.** $\mathrm{e}^{\frac{\ln(23)}{92}}$

Preuve.
Pour x réel positif, on obtient en composant par la fonction ln définie sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} x^{23} = 92 &\iff \ln x^{23} = \ln 92 \\ &\iff 23 \ln x = \ln 92 \\ &\iff \ln x = \frac{\ln 92}{23} \end{aligned}$$

Puis en composant par la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$:

$$x^{23} = 92 \iff x = \mathrm{e}^{\frac{\ln 92}{23}} \approx 1,21$$

La solution exacte est donc la réponse c.

Question 4 (Réponse c)

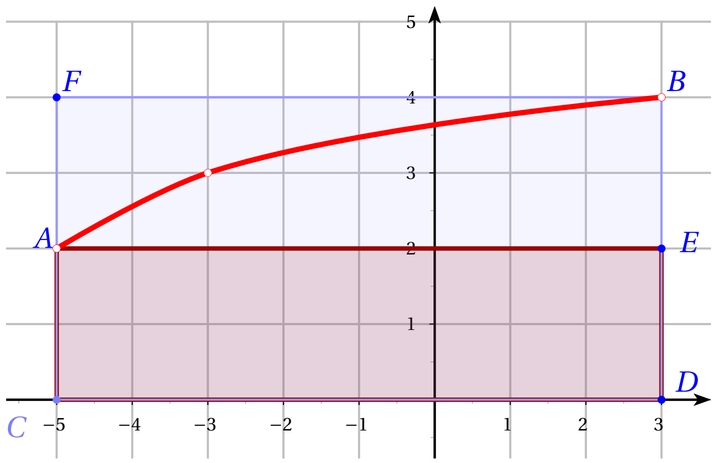
On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-10 ; 10]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	-10		-5		3		10
$g(x)$	7	↘	2	↗	4	↘	-6

On note $I = \int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$. On peut affirmer que :

a. $-5 \leqslant I \leqslant 3$ **b.** $2 \leqslant I \leqslant 4$ $\boxed{\textbf{c. } 16 \leqslant I \leqslant 32}$ **d.** $4 \leqslant I \leqslant 8$

Preuve.
La fonction g est strictement positive (et continue) sur l'intervalle $[-5 ; 3]$ donc I, en unités d'aire, correspond à l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -5$ et $x = 3$.



- La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[-5 ; 3]$ avec $\begin{cases} g(-5) = 2) \\ g(3) = 4 \end{cases}$ donc l'aire sous la courbe est compris :
  - entre celle du rectangle ACDE d'aire :
  $$\mathscr{A}_1 = 8 \times 2 = 16 \text{ u.a.}$$
  - et celle du rectangle AFBE d'aire :
  $$\mathscr{A}_2 = 8 \times 4 = 32 \text{ u.a.}$$
- On a donc :
$$16 \leq I = \int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x \leq 32$$

Exercice 2. Fonction et problème — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20\,;\,20]$ par : $f(x) = (-2x+30)\mathrm{e}^{0,2x-3}$.

1.

1. a. Montrer que $f'(x) = (-0,4x+4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ pour tout réel x de l'intervalle $[-20\,;\,20]$.

$$f : \begin{cases} [-20\,;\,20] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \qquad x & \longmapsto \quad f(x) = (-2x+30)\times \mathrm{e}^{0,2x-3} \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $[-20\,;\,20]$.
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v+uv'$ avec :

$$\forall x \in [-20\,;\,20]\,;\ f(x) = u(x)\times v(x) \ : \ \begin{cases} u(x) = (-2x+30) & ; \quad u'(x) = -2 \\ v(x) = \mathrm{e}^{0,2x-3} & ; \quad v'(x) = 0,2\ \mathrm{e}^{0,2x-3} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-20\,;\,20],\ \ f'(x) &= u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x) \\ f'(x) &= -2\times \mathrm{e}^{0,2x-3} + (-2x+30)\times 0,2\ \mathrm{e}^{0,2x-3} \\ f'(x) &= \Big(-2+0,2(-2x+30)\Big)\times \mathrm{e}^{0,2x-3} \\ f'(x) &= \Big(-2-0,4x+6\Big)\times \mathrm{e}^{0,2x-3} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [-20\,;\,20]\,;\ f'(x) = (-0,4x+4)\mathrm{e}^{0,2x-3}}$$

1. b. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle [- 20; 20] . On précisera la valeur exacte du maximum de f.

La fonction dérivée f' s'exprime sous la forme d'un produit de deux facteurs. Le facteur $\mathrm{e}^{0,2x-3}$ est strictement positif sur [- 20; 20]car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. De ce fait, f' est du signe du facteur polynôme du premier degré $(-0,4x+4)$. On a facilement :

$$\begin{cases} -0,4x+4 = 0 \iff x = 10 \\ -0,4x+4 < 0 \iff x > 10 \end{cases}$$

Et donc

x	-20		10		20
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$70\,\mathrm{e}^{-7} \approx 0.06$	$\nearrow$	$10\,\mathrm{e}^{-1} \approx 3.7$	$\searrow$	$-10\,\mathrm{e}^{1} \approx -27$

Le maximum étant atteint pour $x = 10$ et de valeur exacte :

$$f(10) = (-2\times 10+30)\mathrm{e}^{0,2\times 10-3} = 10\ \mathrm{e}^{2-3} = \underline{10\mathrm{e}^{-1}}$$

2.

2. a. Montrer que, sur l'intervalle $[-20\ ;\ 20]$, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α.

x	-20	10	α	20
Variations de f	$70\,\mathrm{e}^{-7} \approx 0.06$ ↗	$10\,\mathrm{e}^{-1} \approx 3.7$ ↘	-2 ↘	$-10\,\mathrm{e}^{1} \approx -27$

- Sur l'intervalle $[-20\ ;\ 10]$
  Sur l'intervalle $[-20\ ;\ 10]$ la fonction f est strictement croissante est positive car de minimum $f(-20) = 70\,\mathrm{e}^{-7} \approx 0.06$(. Donc l'équation $f(x) = -2$ n'y admet pas de solution.

- Application du corollaire sur $[10; 20]$:

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

Remarque *: Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

  – La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[10; 20]$;
  – Le réel $k = -2$ est compris entre $f(10) \approx 3.7$ et $f(20) \approx -27$
  – Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
    l'équation $f(x) = -2$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[10; 20]$.

- Conclusion : sur l'intervalle $[-20\ ;\ 20]$, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α.

2. b. Donner un encadrement de α d'amplitude $0,1$.

Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

- Avec un pas de $\Delta = 0.1$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(15,8) & \approx & -1,878 > -2 \\ f(15,9) & \approx & -2,155 > -2 \end{array}\right| ,\ \text{donc } \underline{15,8 < \alpha < 15,9}.$$

3. *Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :*

1	Dériver $(-10x+200)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ $(-2x+30)\mathrm{e}^{0,2x-3}$
2	Dériver $(2x+30)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ $(-0,4x+4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$
3	Dériver $(-0,4x+4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ $(-0,08x+0,4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$

Répondre aux deux questions suivantes en utilisant les résultats donnés par le logiciel :

3. a. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{10}^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$f : \left\{\begin{array}{rcl} [-20\ ;\ 20] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = (-2x+30)\ \mathrm{e}^{0,2x-3} \end{array}\right.$$

La ligne 1 des résultats du logiciel de calcul formel nous donne une primitive de f sur $[-20\ ;\ 20]$. En effet on peut lire que la dérivée de la fonction $x \to (-10x+200)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ est $f(x)$. En notant F cette primitive on obtient donc :

$$\begin{aligned}\int_{10}^{15} f(x)\,\mathrm{d}x &= F(15)-F(10)\\ &= (-10\times15+200)\mathrm{e}^{0,2\times15-3}-(-10\times10+200)\mathrm{e}^{0,20\times10-3}\\ &= 50\mathrm{e}^{0}-100\mathrm{e}^{-1}\\ &= \underline{50-100\,\mathrm{e}^{-1}}\end{aligned}$$

3. b. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

La ligne 2 des résultats du logiciel de calcul formel nous redonne la dérivée de f sur $[-20 ; 20]$, et la ligne 3 la dérivée de f' sur $[-20 ; 20]$ donc la dérivée seconde f''.
On a donc :

$$f'' : \left\{\begin{array}{rcl} [-20 ; 20] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f''(x) = (-0,08x+0,4)\mathrm{e}^{0,2x-3}\end{array}\right.$$

La fonction dérivée seconde f'' s'exprime sous la forme d'un produit de deux facteurs. Le facteur $\mathrm{e}^{0,2x-3}$ est strictement positif sur [- 20; 20]car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. De ce fait, f'' est du signe du facteur polynôme du premier degré $(-0,08x+0,4)$. On a facilement :

$$\left\{\begin{array}{l} -0,08x+0,4=0 \Longleftrightarrow x=5\\ -0,08x+0,4<0 \Longleftrightarrow x>5\end{array}\right.$$

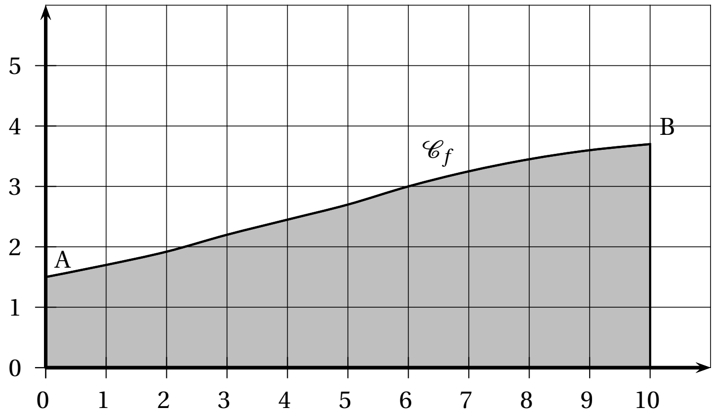
Et donc

x	-20		5		20
Signe de $f''(x)$		+	0	−	
Convexité de f		f convexe	PI	f concave	

La dérivée seconde est positive sur l'intervalle $[-20 ; 5]$ et négative sur l'intervalle $[5 ; 20]$ donc elle est convexe sur l'intervalle $[-20 ; 5]$ et concave sur l'intervalle $[5 ; 20]$.

Partie B

Une station de ski souhaite ouvrir une nouvelle piste au public. Le relief de cette piste est modélisé ci-dessous par la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie dans la partie A sur l'intervalle [0; 10]. Le point B représente le départ de la nouvelle piste et le point A représente la station de ski où se trouve l'arrivée.



Le réel x représente la distance horizontale, exprimée en km, depuis la station de ski et $f(x)$ représente l'altitude, exprimée en km. On appelle pente de la piste au point M, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M. Par exemple, une pente de 15 % en un point de la piste correspond à un coefficient directeur de $\dfrac{15}{100} = 0,15$.

1. **On appelle dénivelé d'une piste de ski, la différence d'altitude entre le point de départ et le point d'arrivée de cette piste. Calculer le dénivelé de cette nouvelle piste. On arrondira le résultat au mètre.**
L'altitude du point A est l'image de 0 par f et celle du point B l'image de 10 par f.
Donc le dénivelé de la nouvelle piste est, arrondi au mètre :
$$\begin{aligned} f(10) - f(0) &= (-2\times 10+30)\ \mathrm{e}^{0,2\times 10-3} - (-2\times 0+30)\ \mathrm{e}^{0,2\times 0-3} \\ &= 10\ \mathrm{e}^{-1} - 30\,\mathrm{e}^{-3} \approx \underline{2,185 \text{ km}} \end{aligned}$$

2. *La station de ski doit déterminer la difficulté de cette nouvelle piste en fonction de la pente.*
   - *La piste sera classée noire, si au moins une portion de la piste a une pente supérieure ou égale à 40 %.*
   - *La piste sera classée rouge, si au moins une portion de la piste a une pente strictement comprise entre 25 % et 40 %* (et aucune portion avec une pente supérieure ou égale à 40 %).
   - *Si toutes les portions de la piste ont une pente inférieure ou égale à 25 % alors la piste sera classée bleue.*

   Déterminer le niveau de difficulté de cette nouvelle piste. Justifier la réponse.
On appelle pente de la piste au point M, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M. Ce coefficient directeur est le nombre dérivé $f'(x_M)$. Il nous faut donc étudier les variations de la fonction f' dont on connait la dérivée f'' d'après la question (3b.). En outre, on a déjà étudié le signe de f''. Il nous suffit de reprendre l'étude de la question (3b.) cette fois sur l'intervalle [0 ; 10] on obtient :

x	-20		5		10
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f'	$12\,\mathrm{e}^{-7} \approx 1.09\%$	$\nearrow$	$2\,\mathrm{e}^{-2} \approx 27.07\%$	$\searrow$	0

Le maximum de f' sur [0 ; 10] est :
$$f'(5) = 2\,\mathrm{e}^{-2} \approx 27.07\%$$
La pente maximale est donc d'environ 27%. Ainsi une portion de la pente a une pente strictement compris entre 25% et 40% et aucune portion n'a une pente supérieure ou égale à 40%.

La piste sera donc <u>classée rouge, c'est ç dire difficile</u>.

Exercice 3. Obligatoire : Suites — 5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

La renouée du Japon est une plante à croissance très rapide et très invasive. Un jardinier souhaite faire disparaître de son terrain cette espèce qui occupe une superficie de 120 m^2 au 1er janvier 2017. Pour cela, chaque année au printemps, il procède à un arrachage qui permet de réduire de 10 % la superficie de terrain envahi l'année précédente. Cependant, cette espèce de plante ayant une puissance de dissémination très importante, de nouvelles pousses apparaissent chaque été et envahissent une nouvelle parcelle de terrain d'une superficie de 4 m^2.

1. Déterminer la superficie de terrain envahi par cette plante au 1er janvier 2018.

Au 1er janvier 2018, les 120 m^2 du 1er janvier 2017 auront été réduit de 10% et les nouvelles pousses seront apparues sur une superficie de 4 m^2. Diminuer de 10% c'est multiplier par 0,9 donc on aura au 1er janvier 2018 :

$$120 \times 0,9 + 4 = \underline{112 \text{ m}^2}$$

On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente la superficie de terrain en m^2 envahi par la Renouée du Japon au 1er janvier de l'année $2017+n$. La suite (u_n) est donc définie par $u_0 = 120$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 0,9u_n + 4$.

2. Le jardinier souhaite connaître l'année à partir de laquelle il aura réduit au moins de moitié la superficie de terrain envahi par rapport au 1er janvier de l'année 2017. Recopier et compléter les lignes L1, L3, L4 et L7 de l'algorithme suivant afin qu'il détermine l'année souhaitée.

L1	U prend la valeur ...
L2	N prend la valeur 0
L3	Tant que $\underline{U > 60}$
L4	U prend la valeur $\underline{U \times 0,9 + 4}$
L5	N prend la valeur $N+1$
L6	Fin tant que
L7	Afficher $\underline{2017+N}$

3. *On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 40$.*

3. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et préciser le premier terme.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 120 \\ u_{n+1} & = 0,9 \times u_n + 4 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - 40 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 40 \\ v_{n+1} &= (0,9\, u_n + 4) - 40 \\ v_{n+1} &= 0,9 \times u_n - 36 \\ v_{n+1} &= 0,9 \times \left(u_n + \frac{-36}{0,9} \right) \\ v_{n+1} &= 0,9 \times (u_n - 40) \\ v_{n+1} &= 0,9 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une <u>suite géométrique</u> de raison $q = 0,9$, et de premier terme $v_0 = 80$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 40 \\ v_0 &= 120 - 40 \\ v_0 &= 80 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = 80 \\ v_{n+1} & = 0,9 \times v_n \end{cases} \quad ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}9$, et de premier terme $v_0 = 80$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\; v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; v_n = 80 \times (0{,}9)^n}$$

3. c. Justifier que $u_n = 80 \times 0{,}9^n + 40$ pour tout entier naturel n.

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 40$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 40$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; u_n = 80 \times (0{,}9)^n + 40}$$

4.

4. a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation : $80 \times 0{,}9^n + 40 \leq 60$.

$$80 \times 0,9^n + 40 \leq 60 \Longleftrightarrow 80 \times 0,9^n \leq 20$$

$$\Longleftrightarrow 0,9^n \leq \frac{20}{80} = 0,25$$

On compose par la fonction ln qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ordre est inchangé :

$$\begin{aligned} 80 \times 0,9^n + 40 \leqslant 60 &\Longleftrightarrow \ln 0,9^n \leq \ln 0,25 \\ &\Longleftrightarrow n \ln 0,9 \leq \ln 0,25 \end{aligned}$$

On divise les deux membres par $\ln 0,9 < 0$, l'ordre change :

$$80 \times 0,9^n + 40 \leqslant 60 \Longleftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,25}{\ln 0,9} \approx 13,16$$

Les solution entières de cette inéquations sont donc les entiers naturels supérieurs ou égaux à 14.

4. b. En déduire l'année à partir de laquelle la superficie envahie par la plante sera réduite au moins de moitié par rapport au 1er janvier de l'année 2017 .

L'inéquation résolue dans la question précédente est :

$$80 \times 0,9^n + 40 \leq 60 \Longleftrightarrow u_n \leq 60 = \frac{u_0}{2} \Longleftrightarrow n \geq 14$$

Puisque la suite (u_n) où u_n représente la superficie de terrain en m^2 envahi par la Renouée du Japon au 1er janvier de l'année $2017 + n$, on en déduit que l'année à partir de laquelle il aura réduit au moins de moitié la superficie de terrain envahi par rapport au 1er janvier de l'année 2017 est $2017 + 14 = 2031$.

5. Le jardinier arrivera-t-il à faire disparaître complètement la plante de son terrain ? Justifier la réponse.

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

De ce fait, ici $-1 < q = 0,9 < 1$ et d'après le théorème 2 :

$$\lim_{n \to +\infty} 80 \times 0,9^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} 80 \times 0,9^n + 40 = 40$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (u_n) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 40}$$

Au bout d'un grand nombre d'années la superficie envahie par cette plante sera de 40 m^2. Le jardinier n'arrivera donc pas à faire disparaître complètement la plante de son terrain.

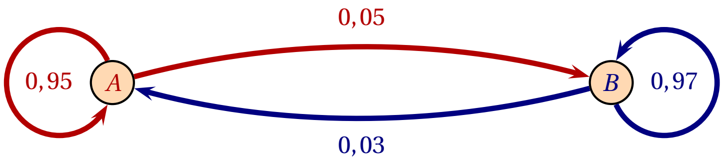
Exercice 3. Spécialité — 5 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ *l'état probabiliste correspondant aux intentions de vote le* n*-ième mois après le début de la campagne.*
On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \end{pmatrix}$.

1.

1. a. Dessiner le graphe probabiliste $(\mathscr{G})$ de sommets A et B.
D'après les données, on obtient le graphe probabiliste suivant :



1. b. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
La matrice de transition M se construit à partir des probabilités suivantes :

- 1ère ligne : probabilité d'aller de A vers A, de A vers B ;
- 2ème ligne : probabilité d'aller de B vers A, de B vers B.

On obtient donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix}}$$

2. Démontrer que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,628 & 0,372 \end{pmatrix}$.
Pour tout entier n on a : $P_{n+1} = Pn \times M$ donc ici :

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 \times M \\ &= \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,95 \times 0,65 + 0,03 \times 0,35 & 0,05 \times 0,65 + 0,97 \times 0,35 \end{pmatrix} \\ P_1 &= \underline{\begin{pmatrix} 0,628 & 0,372 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

3. *On note* $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ *l'état stable associé à ce graphe.*

3. a. Démontrer que les nombres a et b sont solutions du système $\begin{cases} 0,05a - 0,03b & = & 0 \\ a + b & = & 1 \end{cases}$

Propriété 2

L'état stable dans un système a deux états, est la matrice $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ telle que : $\begin{cases} P = P \times M \\ a + b = 1 \end{cases}$.

Par définition, la matrice P est telle que :

$$\begin{cases} P = P \times M \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix} \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95a + 0,03b & 0,05a + 0,97b \end{pmatrix} \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0,95a + 0,03b \\ b = 0,05a + 0,97b \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} 0,05a - 0,03b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}}$$

3. b. Résoudre le système précédent.

$$\begin{cases} 0,05a - 0,03b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0,05a - 0,03(1-a) = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 0,05a - 0,03 + 0,03a = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 0,08a = 0,03 \\ a + b = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{3}{8} \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{3}{8} = 0,375 \\ b = \dfrac{5}{8} = 0,625 \end{cases}$$

Les solutions du système sont donc : $\underline{a = 0,375 \text{ et } b = 0,625}$.

3. c. Interpréter dans le contexte de l'exercice la solution obtenue à la question 3. b.

La solution obtenue à la question **3. b.** nous donne l'état stable du système : $P = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix}$.

Propriété 3 (État stable)

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition M ne comporte pas de 0, l'état P_n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_0.
Cet état stable vérifie l'égalité :

$$P = P \times M$$

Donc dans le cas ici présent, cela signifie que sur le long terme, le candidat B obtiendra 62,5% des voix et le candidat A obtiendra 37,5% des voix.

4.

4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0,92a_n + 0,03$.

Par définition on a pour tout entier n : $P_{n+1} = P_n \times M$ et $a_n + b_n = 1$ donc

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n \times M \\ a_n + b_n = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix} \\ a_n + b_n = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95a_n + 0,03b_n & 0,05a_n + 0,97b_n \end{pmatrix} \\ a_n + b_n = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a_{n+1} = 0,95a_n + 0,03b_n \\ b_{n+1} = 0,05a_n + 0,97b_n \\ a_n + b_n = 1 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a donc :

$$a_{n+1} = 0,95a_n + 0,03(1 - b_n) \iff \underline{a_{n+1} = 0,92a_n + 0,03}$$

4. b. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 0,375$. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,92$ et préciser le premier terme.

Les suites (a_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(a_n) : \begin{cases} a_0 & = 0{,}65 \\ a_{n+1} & = 0{,}92 \times a_n + 0{,}03 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = a_n - 0{,}375 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - 0{,}375 \\ v_{n+1} &= (0{,}92\, a_n + 0{,}03) - 0{,}375 \\ v_{n+1} &= 0{,}92 \times a_n - 0{,}345 \\ v_{n+1} &= 0{,}92 \times \left(a_n + \frac{-0{,}345}{0{,}92}\right) \\ v_{n+1} &= 0{,}92 \times (a_n - 0{,}375) \\ v_{n+1} &= 0{,}92 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}92$, et de premier terme $v_0 = 0{,}275$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= a_0 - 0{,}375 \\ v_0 &= 0{,}65 - 0{,}375 \\ v_0 &= 0{,}275 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = 0{,}275 \\ v_{n+1} & = 0{,}92 \times v_n \end{cases} \quad ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

4. c. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et en déduire que : $a_n = 0,275 \times 0,92^n + 0,375$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}92$, et de premier terme $v_0 = 0{,}275$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} ;\ v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ;\ v_n = 0{,}275 \times (0{,}92)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = a_n - 0{,}375$$

On peut en déduire l'expression :

$$a_n = v_n + 0{,}375$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ;\ a_n = 0{,}275 \times (0{,}92)^n + 0{,}375}$$

5. La campagne électorale dure 11 mois. Si la modélisation de l'institut de sondage est valable, quel candidat sera probablement élu ? Justifier la réponse.

On a :

$$a_{11} = 0,275 \times 0,92^{11} + 0,375 \approx 0,488 < 0,5$$

Donc moins de la moitié des personnes déclarent voter pour le candidat A après 11 mois. C'est donc le candidat B qui sera probablement élu.

Exercice 4. Exercice 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

Une base nautique propose la location de différentes embarcations pour visiter les gorges du Verdon. Les touristes peuvent louer des kayaks, des pédalos ou des bateaux électriques, pour une durée de 1 heure ou 2 heures.

Partie A

On interroge au hasard un touriste qui vient pour louer une embarcation. On note A, B, C, D et E les évènements suivants :

- *A : « l'embarcation louée est un pédalo » et B : « l'embarcation louée est un kayak » ; C : « l'embarcation louée est un bateau électrique » ; D : « l'embarcation est louée pour 1 heure » ; E : « l'embarcation est louée pour 2 heures ».*

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.

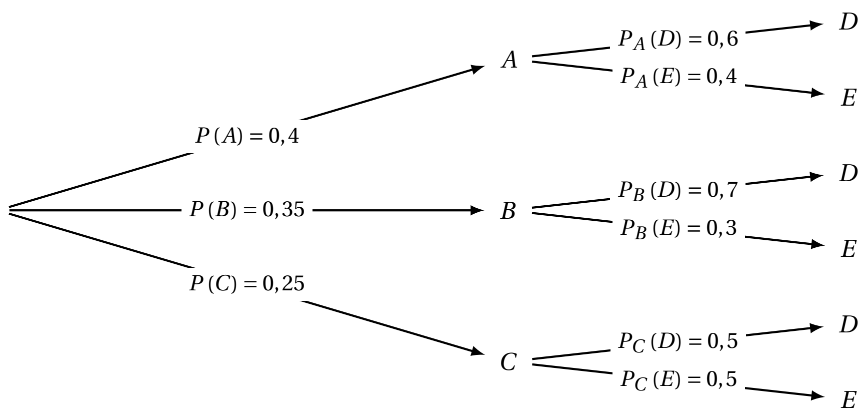
- *40 % des embarcations louées sont des pédalos et 35 % des embarcations louées sont des kayaks ; les autres embarcations louées sont des bateaux électriques* donc :

$$p(A) = 0,4 \;;\; p(B) = 0,35 \text{ et } p(C) = 1 - 0,4 - 0,35 = 0,25$$

- *60 % des pédalos sont loués pour une durée de 1 heure ; 70 % des kayaks sont loués pour une durée de 1 heure ; la moitié des bateaux électriques sont loués pour une durée de 1 heure.* donc

$$p_A(D) = 0,6 \;;\; p_B(D) = 0,7 \text{ et } p_C(D) = 0,5$$

On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. Calculer la probabilité $p(A \cap E)$.
On a directement :

$$p(A \cap E) = p(A) \times p_A(E) = 0,4 \times 0,4 = \underline{0,16}$$

3. Montrer que la probabilité que l'embarcation soit louée pour une durée de 2 heures est égale à 0,39.
La probabilité cherchée est $p(E)$. Les évènement A, B et C forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(E) &= p(A \cap E) + p(B \cap E) + p(C \cap E) \\ &= 0,16 + 0,35 \times 0,3 + 0,25 \times 0,5 \\ p(E) &= \underline{0,39} \end{aligned}$$

La probabilité que l'embarcation soit louée pour une durée de 2 heures est égale à 0,39.

4. Sachant que l'embarcation a été louée pendant 2 heures, quelle est la probabilité que ce soit un bateau électrique ? Arrondir le résultat au centième.
La probabilités cherchée est $p_E(C)$ soit :

$$p_E(C) = \frac{p(E \cap C)}{p(E)} = \frac{0,25 \times 0,5}{0,39} \approx \underline{0,32}$$

5. *La base nautique pratique les tarifs suivants :*

	1 heure	2 heures
Pédalo	15 €	25 €
Kayak	10 €	16€
Bateau électrique	35 €	60€

En moyenne, 200 embarcations sont louées par jour. Déterminer la recette journalière que peut espérer la base nautique.
On peut estimer le nombre d'embarcations de chaque catégorie qui sera loué à l'aide des probabilités du graphes. Pour 200 embarcations louées, on peut estimer qu'il y aura :

	1 heure	2 heures
Pédalo	$200\times p\left(A\cap D\right)=200\times 0,4\times 0,6=48$	$200\times p\left(A\cap E\right)=200\times 0,4\times 0,4=32$
Kayak	$200\times p\left(B\cap D\right)=200\times 0,35\times 0,7=49$	$200\times p\left(B\cap E\right)=200\times 0,35\times 0,3=21$
Bateau électrique	$200\times p\left(C\cap D\right)=200\times 0,5\times 0,25=25$	$200\times p\left(C\cap E\right)=200\times 0,5\times 0,25=25$

La recette estimée est alors de :

$$R=15€\times 48+10€\times 49+35€\times 25+25€\times 32+16€\times 21+60€\times 25=\underline{4\,721€}$$

La base nautique peut donc espérer une recette journalière de 4 721 euros.

Partie B

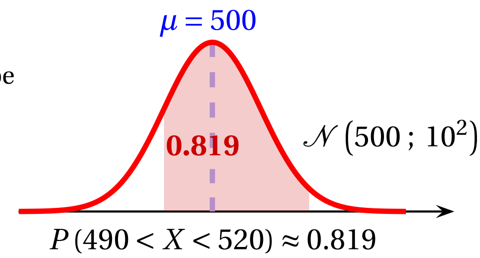
Dans cette partie les résultats seront arrondis au millième

Les bateaux électriques sont équipés d'une batterie d'une autonomie moyenne de 500 minutes. Les batteries des bateaux sont rechargées uniquement à la fin de chaque journée d'utilisation. On note X la variable aléatoire correspondant à la durée de fonctionnement de la batterie d'un bateau, exprimée en minutes. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu=500$ et d'écart-type $\sigma=10$.

1. À l'aide de la calculatrice, calculer $p(490<X<520)$.

La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu=500$ et d'écart-type $\sigma=10$. La calculatrice nous donne à 10^{-3} près :

$$X\sim\mathcal{N}\left(500\,;\,10^2\right)\Longrightarrow P\left(490<X<520\right)\approx\underline{0{,}819}$$



> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*$(490\,,\,520\,,\,500\,,\,10)\approx\underline{0{,}818\,595}$
> - *Sur TI82/83+ : normalcdf*$(490\,,\,520\,,\,500\,,\,10)$ *ou (fr.) normalfrép*$(490\,,\,520\,,\,500\,,\,10)$
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd $\Rightarrow$ NormCD*$(490\,,\,520,\,10\,,\,500\,)$

2. Chaque jour, les bateaux sont utilisés pendant une durée de 8 heures sans être rechargés. Déterminer la probabilité que la batterie d'un bateau soit déchargée avant la fin de la journée.
La variable aléatoire X correspond à la durée de fonctionnement de la batterie d'un bateau, exprimée en minutes. Chaque jour, les bateaux sont utilisés pendant une durée de 8 heures (soit 480 minutes) sans être rechargés donc la probabilité que la batterie d'un bateau soit déchargée avant la fin de la journée correspond à $p\left(X<480\right)$.

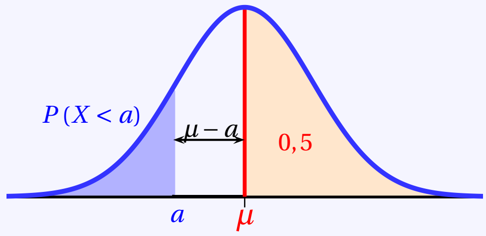
Propriété 4 ($P(X < a)$; $a < \mu$)

Si la variable X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

$$P\left(X < \mu\right) = 0,5 = P\left(X > \mu\right)$$

De plus pour tout réel a avec $a < \mu$:

$$\boxed{P(X < a) = 0,5 - P\left(a < X < \mu\right)}$$



On a ici $480 < \mu = 500$ donc $p(X < 480) = 0,5 - p(480 < X < 500)$ et la calculatrice donne :

$$p(X < 480) = 0,5 - p(480 < X < 500) \approx \underline{0,023}$$

La probabilité que la batterie d'un bateau soit déchargée avant la fin de la journée est d'environ 0,023.

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 :* $\left(0,5 - \textit{TIStat.normFDR}(480\,,\,500\,,\,500\,,\,10)\right) \approx \underline{0,022\,750}$
> - *Sur TI82/83+ : normalcdf*(480 , 500 , 500 , 10) *ou (fr.) normalfrép*(480 , 500 , 500 , 10)
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* ⇒ *NormCD*(480 , 500, 10 , 500)

3. Déterminer l'entier a tel que $p(X < a) \approx 0,01$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On cherche a tel que $P(X \leq a) = 0,01$ où X qui suit une loi normale $\mathcal{N}\left(500\,;\,10^2\right)$. La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à 10^{-3} près :

$$\boxed{P(X \leq a) = 0,01 \iff a \approx \underline{476,737}}$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*(0.01 , 500 , 10) ≈ $\underline{476,737}$
> - *Sur TI82/83+ : invNorm*(0.01 , 500 , 10) *ou (fr.) FracNormale*(0.01 , 500 , 10)
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN* ⇒ *InvNormCD*(0.01 , 10 , 500)

Cela signifie que la probabilité que batterie d'un bateau soit déchargée avant 477 minutes d'utilisation est d'environ 0,01.

Fin du devoir