Baccalauréat 2016 - S
Amérique du Nord

Math93.com

Série S Obli. et Spé.
1 juin 2016
Correction

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. Probabilités — 6 points

Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

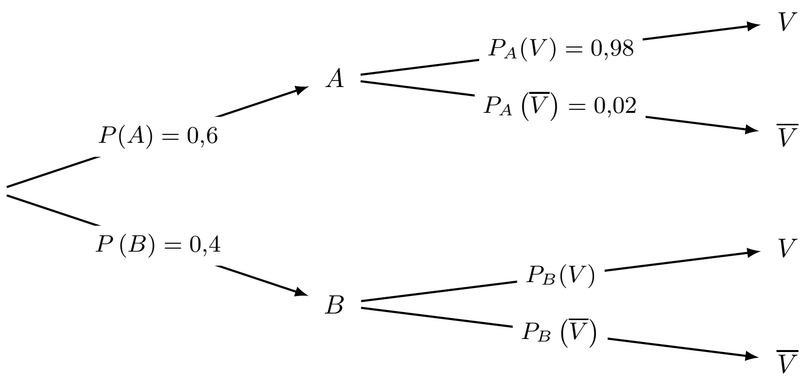
Partie A

- *96 % de la production journalière est vendable.*
- *La machine A fournit 60 % de la production journalière.*
- *La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.*

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :
A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ; B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ; V : « la bille est vendable ».

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.

- Analyse des données
  - « *La machine A fournit 60 % de la production journalière.* » donc $p(A) = 0,6$ et $p(B) = 0,4$;
  - « *La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.* »
    donc $p_A(V) = 0,98$ et $p_A\left(\overline{V}\right) = 0,02$.
- Arbre : On peut résumer les données fournies par un arbre :



- Calcul de $p(A \cap V)$.
  La probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A et alors :

$$\begin{aligned} p(A \cap V) &= p(A) \times p_A(V) \\ &= 0,6 \times 0,98 \end{aligned}$$

$$\boxed{p(A \cap V) = 0,588}$$

2. Justifier que $P(B \cap V) = 0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

- Calcul de $P(B \cap V)$.
  D'après la formule des probabilités totales on a :
  $$p(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V)$$
  Or « *96 % de la production journalière est vendable.* » donc $p(V) = 0,96$ soit avec le résultat de la question (A.1.) :
  $$0,96 = 0,588 + P(B \cap V)$$
  D'où
  $$\boxed{P(B \cap V) = 0,96 - 0,588 = 0,372}$$
- Calcul de $p_B(V)$.
  La probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B est donnée par :
  $$\boxed{p_B(V) = \frac{P(B \cap V)}{p(B)} = \frac{0,372}{0,4} = \underline{0,93}}$$

3. Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B. A-t-il raison ?
On va calculer la probabilité qu'une bille provienne de la machine B sachant qu'elle est non vendable soit :
$$p_{\overline{V}}(B) = \frac{P(B \cap \overline{V})}{p\left(\overline{V}\right)}$$

- On a facilement
  $$p\left(\overline{V}\right) = 1 - p(V) = \underline{0,04}$$
- En outre en procédant comme dans la question **(A.2.)**, d'après la formule des probabilités totales :
  $$\begin{aligned} p\left(\overline{V}\right) &= P(A \cap \overline{V}) + p\left(B \cap \overline{V}\right) \\ 0,04 &= p(A) \times p_A\left(\overline{V}\right) + p\left(B \cap \overline{V}\right) \\ 0,04 &= \underbrace{0,6 \times 0,02}_{0,012} + p\left(B \cap \overline{V}\right) \end{aligned}$$
  D'où
  $$p\left(B \cap \overline{V}\right) = 0,04 - 0,012 = \underline{0,028}$$

De ce fait :
$$\boxed{p_{\overline{V}}(B) = \frac{P(B \cap \overline{V})}{p\left(\overline{V}\right)} = \frac{0,028}{0,04} = 0,7}$$

La technicien a donc raison car <u>70% des billes non vendables proviennent de la machine B</u>.

Partie B

1. Une étude statistique conduit à modéliser le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0,055$. Vérifier que la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien celle trouvée dans la partie A, au centième près.

- Dans la question **(A.2.)**, on a montré que la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable était $p_B(V) = 0,93$. Voyons si l'on retrouve ce résultat avec la modélisation proposée.
- La variable aléatoire X modélise le diamètre d'une bille prélevée dans la machine B. Ce diamètre doit être compris entre 0,9 cm et 1,1 cm pour que la bille soit vendable. De ce fait
  $$p_B(V) = P(0,9 \leq X \leq 1,1)$$
  La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0,055$, la calculatrice donne directement, arrondi au centième :
  $$\boxed{P(0,9 \leq X \leq 1,1) \approx 0{,}93}$$
  Remarque : Sur la TI Voyage 200
  $$\text{TIStat.normFDR}(0.9, 1.1, 1, 0.055) \approx 0{,}931$$

2. De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type σ', σ' étant un réel strictement positif. Sachant que $P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) = 0,98$, déterminer une valeur approchée au millième de σ'.

Propriété 1

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.
La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ si et seulement si, la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}\,(0\,;\,1)$.

Donc ici, puisque Y suit la loi normale $\mathcal{N}\left(1\,;\,\sigma'^2\right)$, la v.a. $Z = \dfrac{Y-1}{\sigma'}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}\,(0\,;\,1)$.
On cherche ici une valeur approchée au millième de σ' sachant que $P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) = 0,98$, or :

$$\begin{aligned}P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) = 0,98 &\iff P\left(\frac{0,9-1}{\sigma'} \leqslant \frac{Y-1}{\sigma'} \leqslant \frac{1,1-1}{\sigma'}\right) = 0,98\\ &\iff P\left(\frac{-0,1}{\sigma'} \leqslant Z \leqslant \frac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,98\end{aligned}$$

Or la v.a. Z suit la loi normale centrée réduite et on rappelle que :

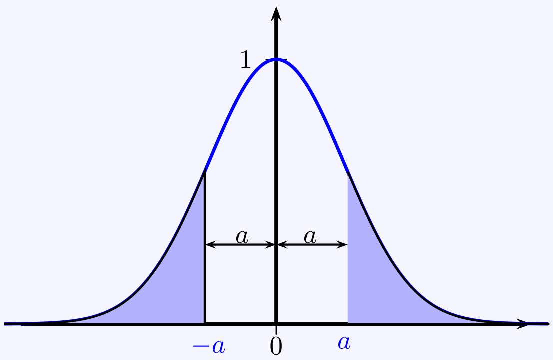
Propriété 2

Soit X une v.a. qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}\,(0\,;\,1)$.

2. a. La fonction Φ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(t) = P\,(X \leq t)$.

2. b. Pour tout réel a on a :

- (1) : $P\,(X \leq -a) = P\,(X \geq a)$
- (2) : $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
- (3) : $P\,(-a \leq X \leq a) = 2\Phi(a) - 1$



De ce fait en appliquant la relation (3) de la propriété 2 :

$$\begin{aligned}P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) = 0,98 &\iff P\left(\frac{-0,1}{\sigma'} \leqslant Z \leqslant \frac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,98\\ &\iff 2\Phi\left(\frac{0,1}{\sigma'}\right) - 1 = 0,98\\ &\iff \Phi\left(\frac{0,1}{\sigma'}\right) = \frac{0,98+1}{2} = 0,99\end{aligned}$$

La calculatrice nous donne alors :

$$\frac{0,1}{\sigma'} \approx 2{,}326\,35$$

Soit arrondi au millième :

$$\boxed{\sigma' \approx 0,043}$$

Calculatrice : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.invNorm}(0.99) \approx 2{,}326\,35$$

Remarque : on peut vérifier à l'aide de la calculatrice la cohérence du résultat en calculant $P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1)$ avec Y qui suit $\mathcal{N}\left(\mu = 1\,;\,\sigma'^2 = 0,043^2\right)$. On obtient alors :

$$P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) \approx 0{,}98$$

Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.normFDR}(0.9, 1.1, 1, 0.043) \approx 0{,}979\,959$$

Partie C

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière. Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.

1. a. On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

Les billes vendables sont teintées de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Donc il y a une chance sur cinq qu'une bille soit tentée en noir et quatre sur cinq qu'elle le soit d'une autre couleur (blanc, bleu, jaune ou rouge). On va modéliser le problème en notant X le nombre de billes noires dans le sachet.

- **Modélisation**
  Vérifions les hypothèses de validation d'une *loi binomiale*.
  - Une bille a *2 états* : elle est de couleur noire ou elle ne l'est pas. La probabilité d'être de couleur noire est :
  $$p = \frac{1}{5} = 0,2$$
  - Il y a 40 « tirages ». Chaque tirage est *indépendant, identique* et *aléatoire*.

  De ce fait, la variable aléatoire X désigne bien le nombre de succès d'une répétition, de manière *indépendante*, de 40 *épreuves de Bernoulli* de paramètre $p = 0,2$.

  La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,2$, notée $\mathscr{B}(40\ ;\ 0,2)$.

- **Calcul**
  Puisque X suit une loi Binomiale de paramètre $n = 40$ et $p = 0,2$ on a :
  $$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{40}{k} \times 0,2^k \times (0{,}8)^{40-k}$$
  La probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires se traduit par $p(X = 10)$ or :
  $$p(X = 10) = \binom{40}{10} 0,2^{10} (0,8)^{30}$$
  Donc :
  $$\boxed{p(X = 10) \approx 0,107}$$
  Remarque : Sur la TI Voyage 200

  $$\text{TIStat.binomDdR}(40, 0.2, 10) \approx 0{,}107\,454$$

- **Conclusion**
  La probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires d'environ $0,107$.

1. b. Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?

- **Analyse des données** :
  - « *Sur un échantillon de $n = 40$ billes. Il est constaté que 12 d'entre elles le sont noires.* ». Donc la fréquence observée de billes noires est
$$f = 12 \div 40 = 0{,}3 \text{ soit } \boxed{f = 0{,}3}$$
  - D'après les données on a une chance sur cinq d'obtenir une bille noire soit $\underline{p = 0,2}$.
- **Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 40$, $p = 20\ \%$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 40 \geq 30 \\ \checkmark & np = 40 \times 0{,}2 = 8 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 40 \times 0{,}8 = 32 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}2 - 1,96\,\frac{\sqrt{0{,}2 \times 0{,}8}}{\sqrt{40}}\ ;\ 0{,}2 + 1,96\,\frac{\sqrt{0{,}2 \times 0{,}8}}{\sqrt{40}}\right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}07604$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}076}$.
- $p + 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}32396$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}324}$.

$$\boxed{I_{40} \approx [0{,}076\ ;\ 0{,}324]}$$

- **Conclusion**
La fréquence observée appartient à l'intervalle, $f = 0{,}3 \in I$ donc <u>au risque d'erreur de 5%, ce constat ne remet pas en cause le réglage de la machine qui teinte les billes</u>.

©ISSN 2272-5318

2. Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

Soit Y la v.a. qui compte le nombre de billes noires dans un sachet de n billes. Cette variable suit la loi binomiale de paramètre n et $p = 0,2$ et donc :

$$P(Y=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \times 0,2^k \times 0,8^{n-k}$$

La probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet s'exprime en passant par l'évènement contraire par :

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0)$$
$$P(Y \geq 1) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,2^0 \times 0,8^{n-0}$$

On cherche à déterminer n pour que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %. Cela revient à résoudre l'inéquation en la variable entière n :

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) \geq 0,99 &\iff 1 - \binom{n}{0} \times 0,2^0 \times 0,8^{n-0} \geq 0,99 \\ &\iff 1 - 1 \times 1 \times 0,8^n \geq 0,99 \\ &\iff 1 - 0,8^n \geq 0,99 \\ &\iff 0,8^n \leq 0,01 \end{aligned}$$

En composant par la fonction $\ln$ définie et croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$P(Y \geq 1) \geq 0,99 \iff \ln 0,8^n \leq \ln 0,01$$

On applique alors la propriété $\ln a^n = n \ln a$ définie pour $a > 0$ et n entier :

$$P(Y \geq 1) \geq 0,99 \iff n \ln 0,8 \leq \ln 0,01$$

En divisant chaque membre par $\ln 0,8 < 0$, l'ordre change et :

$$P(Y \geq 1) \geq 0,99 \iff n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,64$$

Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels supérieurs ou égaux à 21.

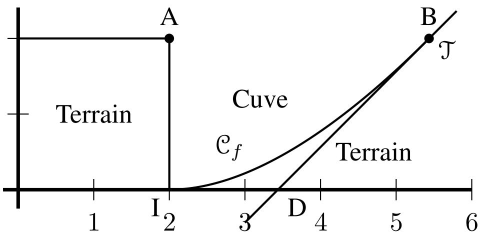
Le nombre minimal de billes que chaque sachet doit contenir pour que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 % est donc de 21 billes.

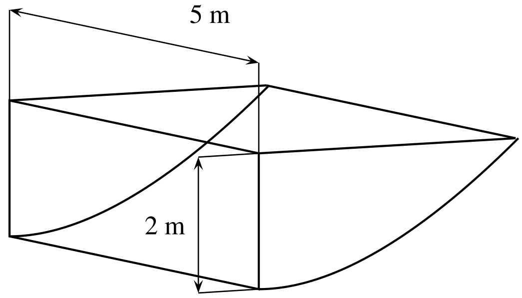
Vérification : avec la calculatrice on obtient

- Pour $n = 20$ alors $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) \approx 0{,}988 < 0,99$;
- Pour $n = 21$ alors $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) \approx 0{,}991 > 0,99$;

Exercice 2. Fonctions — 6 points

Commun à tous les candidats





*[...] le récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant : elle doit être située à deux mètres de sa maison ; la profondeur maximale doit être de deux mètres ; elle doit mesurer cinq mètres de long ; elle doit épouser la pente naturelle du terrain. La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 2e]$ définie par : $f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve. On considère les points $A(2\ ;\ 2)$, $I(2\ ;\ 0)$ et $B(2\,e\ ;\ 2)$.*

Partie A

1. Justifier que les points B et I appartiennent à $\mathcal{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point I.

- Le point B est d'abscisse $x_B = 2\,\mathrm{e}$ et d'ordonnée $y_B = 2$, vérifions que l'image de x_B par f est bien y_B :

$$\begin{aligned} f(2\,\mathrm{e}) &= 2\,\mathrm{e} \times \ln\left(\frac{2\,\mathrm{e}}{2}\right) - 2\,\mathrm{e} + 2 \\ f(2\,\mathrm{e}) &= 2\,\mathrm{e} \times \ln \mathrm{e} - 2\,\mathrm{e} + 2 \\ f(2\,\mathrm{e}) &= 2\,\mathrm{e} \times 1 - 2\,\mathrm{e} + 2 \\ f(2\,\mathrm{e}) &= 2 = y_B \end{aligned}$$

  Donc $y_B = 2 = f(x_B)$ ce qui prouve que B appartient à $\mathcal{C}_f$.
- Le point I est d'abscisse $x_I = 2$ et d'ordonnée $y_I = 0$, vérifions que l'image de x_I par f est bien y_I :

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 \times \ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2 \\ f(2) &= 2 \times \ln 1 \\ f(2) &= 0 = y_I \end{aligned}$$

  Donc $y_I = 0 = f(x_I)$ ce qui prouve que I appartient à $\mathcal{C}_f$.
- **Calcul de la dérivée.**

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [2\ ;\ 2\mathrm{e}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2 \end{array} \right.$$

  La fonction f est dérivable sur $[2\ ;\ 2\mathrm{e}]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
  La fonction f est de la forme $uv + w$ donc de dérivée $u'v + uv' + w'$ avec :

$$\forall x \in [2\ ;\ 2\mathrm{e}]\ ;\ f(x) = u(x) \times v(x) - x + 2 \quad : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = x & ; & u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) & ; & v'(x) = \frac{(x/2)'}{x/2} = \frac{1}{x} \\ w(x) = -x + 2 & ; & w'(x) = -1 \end{array} \right.$$

  On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [2\ ;\ 2\mathrm{e}],\quad f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) + w'(x) \\ f'(x) &= 1 \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ f'(x) &= \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1 - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [2\ ;\ 2\mathrm{e}]\ ;\ f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)}$$

©ISSN 2272-5318

- **Équation de la tangente au point $I(2\ ;\ 0)$.**
La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $I(2\ ;\ 0)$ est d'équation : $y = f'(2)(x-2)+f(2)$

$$\left\{\begin{array}{ll} f(2) & = 0 \\ f'(2) & = \ln 1 = 0 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow \mathcal{T}\ :\ y = 0\times(x-2)+0 \text{ soit } \boxed{(Ox)\ :\ y=0}$$

L'axe des abscisses est bien tangent à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point I.

2. On note $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite $\mathcal{T}$ avec l'axe des abscisses.

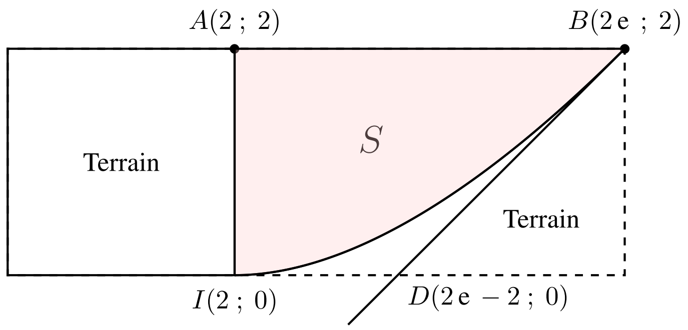
2. a. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}$ et en déduire les coordonnées de D.

- **Équation de $\mathcal{T}$.**
La droite $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $B(2\,\mathrm{e}\ ;\ 2)$, son équation est : $\mathcal{T}\ :\ y = f'(2\,\mathrm{e})(x-2\,\mathrm{e}) + f(2\,\mathrm{e})$

$$\left\{\begin{array}{ll} f(2\,\mathrm{e}) & = 2 \\ f'(2\,\mathrm{e}) & = \ln\left(\dfrac{2\,\mathrm{e}}{2}\right) = \ln \mathrm{e} = 1 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow \mathcal{T}\ :\ y = 1\times(x-2\,\mathrm{e})+2 \text{ soit } \boxed{\mathcal{T}\ :\ y = x-2\,\mathrm{e}+2}$$

- **Coordonnées de D.**
D est le point d'intersection de la droite $\mathcal{T}$ avec l'axe des abscisses donc son ordonnée est nulle et son abscisse est solution de l'équation :
$$x-2\,\mathrm{e}+2 = 0 \iff x = 2\,\mathrm{e}-2$$
Les coordonnées du point D sont donc : $\boxed{D\,(2\,\mathrm{e}-2\ ;\ 0)}$.

2. b. On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, les droites d'équations $y=2$, $x=2$ et $x=2\mathrm{e}$. S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB. Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?



On a facilement :
$$AI = 2\ ;\ AB = 2\,\mathrm{e}-2\ ;\ ID = 2\,\mathrm{e}-2-2 = 2\,\mathrm{e}-4$$

- **Aire du triangle AIB rectangle en A.**
$$\mathscr{A}_{AIB} = \frac{AB\times AI}{2} = \frac{(2\,\mathrm{e}-2)\times 2}{2} = \underline{(2\,\mathrm{e}-2)\ u.a.}$$

- **Aire du trapèze ABDI.**
$$\mathscr{A}_{ABDI} = \frac{(AB+ID)\times AI}{2} = \frac{(2\,\mathrm{e}-2+2\,\mathrm{e}-4)\times 2}{2} = \underline{(4\,\mathrm{e}-6)\ u.a.}$$

- **Encadrement du volume.**
La cuve doit mesurer cinq mètres de long. Son volume $\mathscr{V}$ est encadré par $\mathscr{V}_{ABI}$, celui du solide de face latérale le triangle AIB et de longueur 5 m et par $\mathscr{V}_{AIDB}$, le solide de face latérale le trapèze AIDB et de longueur 5 m. Soit
$$\mathscr{V}_{ABI} < \mathscr{V} < \mathscr{V}_{AIDB} \iff \mathscr{A}_{AIB}\times 5 < \mathscr{V} < \mathscr{A}_{ABDI}\times 5$$
Le volume est donc encadré en m^3 par : :
$$\boxed{5(2\,\mathrm{e}-2)\ \mathrm{m}^3 < \mathscr{V} < 5(4\,\mathrm{e}-6)\ \mathrm{m}^3}\ :\ \left\{\begin{array}{l} \mathscr{V}_{ABI} = 5(2\,\mathrm{e}-2) \approx 17,1828\ \mathrm{m}^3 \\ \mathscr{V}_{AIDB} = 5(4\,\mathrm{e}-6) \approx 24,3656\ \mathrm{m}^3 \end{array}\right.$$

3.

3. a. Montrer que, sur l'intervalle [2 ; 2e], la fonction G définie par $G(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x^2}{4}$ est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

$$G : \left\{\begin{array}{rcl} [2\,;\,2\mathrm{e}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & G(x) = \dfrac{x^2}{2}\times\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x^2}{4} \end{array}\right.$$

La fonction G est dérivable sur $[2\,;\,2\mathrm{e}]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
La fonction G est de la forme $uv + w$ donc de dérivée $u'v + uv' + w'$ avec :

$$\forall x \in [2\,;\,2\mathrm{e}]\,;\; G(x) = u(x)\times v(x) - \frac{x^2}{4} \quad : \quad \left\{\begin{array}{lcl} u(x) = \dfrac{x^2}{2} & ; & u'(x) = x \\ v(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) & ; & v'(x) = \dfrac{(x/2)'}{x/2} = \dfrac{1}{x} \\ w(x) = -\dfrac{x^2}{4} & ; & w'(x) = -\dfrac{x}{2} \end{array}\right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [2\,;\,2\mathrm{e}],\quad G'(x) &= u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x) + w'(x) \\ G'(x) &= x\times\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x} - \frac{x}{2} \\ G'(x) &= x\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [2\,;\,2\mathrm{e}]\,;\; G'(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Sur l'intervalle [2 ; 2e], la fonction G est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$

3. b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 2e].
La fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,2\mathrm{e}]$ est définie par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$$

- Une primitive de la fonction $x \longmapsto -x + 2$ est $x \longmapsto -\dfrac{x^2}{2} + 2x$;
- On vient de le montrer, une primitive de la fonction $x \longmapsto g(x) = x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est $x \longmapsto G(x)$;

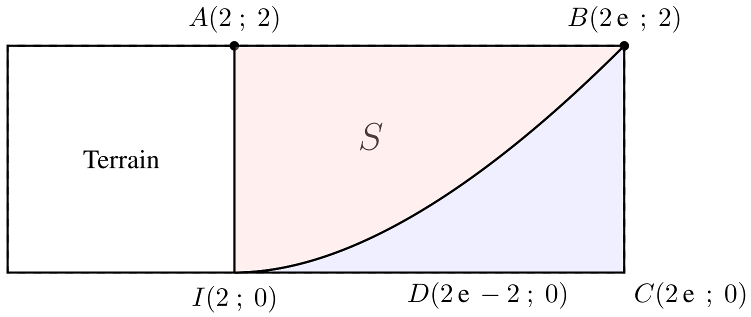
Donc une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 2e] est définie par :

$$F(x) = G(x) - \frac{x^2}{2} + 2x = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x$$

$$\boxed{F(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3x^2}{4} - 2x}$$

©ISSN 2272-5318

3. c. Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.



L'aire S s'obtient en faisant la différence de l'aire du rectangle ABCI de côtés 2 et $2\,\mathrm{e}-2$ et de la partie du plan comprise sous la courbes $\mathcal{C}$, l'axe des abscisse et les droites verticales d'équation $x=2$ et $x=2\,\mathrm{e}$ soit :

$$S=\mathscr{A}_{ABCI}-\int_2^{2\,\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$S=2\times(2\,\mathrm{e}-2)-\Big[\ F(x)\ \Big]_2^{2\,\mathrm{e}}$$
$$S=4\,\mathrm{e}-4-F(2\,\mathrm{e})+F(2)$$
$$S=4\,\mathrm{e}-4-(4\,\mathrm{e}-\mathrm{e}^2)+1$$

$$\boxed{S=\mathrm{e}^2-3}$$

Et donc le volume de la cuve est au m^3 près :

$$\boxed{\mathscr{V}=5S=5(\mathrm{e}^2-3)\approx 22\ \mathrm{m}^3}$$

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et 2e, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$. On admet que, pour tout réel x de l'intervalle [2 ; 2e],

$$v(x)=5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)-2x\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{4}+2x-3\right].$$

1. Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?

On sait que $v(x)$ est le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$. On veut trouver ce volume pour une hauteur d'eau de 1 m, donc lorsque $f(x)=1$.
Il nous faut donc résoudre l'équation $f(x)=1$.

- Variations de f.
  On a montré lors de la question **(A.1.)** que

$$\forall x\in[2\ ;\ 2\,\mathrm{e}]\ ;\ f'(x)=\ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

Or

$$2\leq x\leq 2\,\mathrm{e}\iff 1\leq\frac{x}{2}\leq\mathrm{e}$$

Et puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ on obtient :

$$\ln 1=0\leq\ln\frac{x}{2}\leq\ln\,\mathrm{e}=1\iff 0\leq f'(x)\leq 1$$

De ce fait la dérivée f' est positive strictement sur $[2\ ;\ 2\,\mathrm{e}]$ et la fonction f strictement croissante sur cet intervalle.

- Résolution de l'équation.

x	2	α	$2\,\mathrm{e}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	1	2

Théorème 2 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).

Application du corollaire sur $[2\ ;\ 2\,\mathrm{e}]$:

- La fonction f est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[2\ ;\ 2\,\mathrm{e}]$;
- L'image par f de l'intervalle $[2\ ;\ 2\,\mathrm{e}]$ est $[f(2)\ ;\ f(2\,\mathrm{e})]$ d'après le tableau de variations.
- On a :
$$f(2) = 0 < 1 < f(2\,\mathrm{e}) = 2$$
Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[2\ ;\ 2\,\mathrm{e}]$.
- **Valeur approchée**.
Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.
  * Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient : $\left\{\begin{array}{lcl} f(4,31) & \approx & 0,999 < 1 \\ f(4,32) & \approx & 1,0069 > 1 \end{array}\right|$, donc $4,31 < \alpha < 4,32$.

  Une valeur approchée de α à 0.01 près est donc $\alpha \approx 4,32$.

- Calcul du volume d'eau.
On a donc un volume d'eau, au m^3 près, dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre de :
$$\boxed{v(\alpha) \approx 7\ \mathrm{m}^3}$$

2. On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre. Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

Cet algorithme permet d'afficher la hauteur d'eau dans la cuve quand celle-ci est remplie à moitié.

Variables :	a est un réel
	b est un réel
Traitement :	a prend la valeur 2
	b prend la valeur 2 e
	Tant que $v(b) - v(a) > 10^{-3}$ faire :
	c prend la valeur $(a+b)/2$
	Si $v(c) < V/2$, alors :
	a prend la valeur c
	Sinon
	b prend la valeur c
	Fin Si
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $f(c)$

Exercice 3. Complexes (Ex. à prise d'initiative) 3points

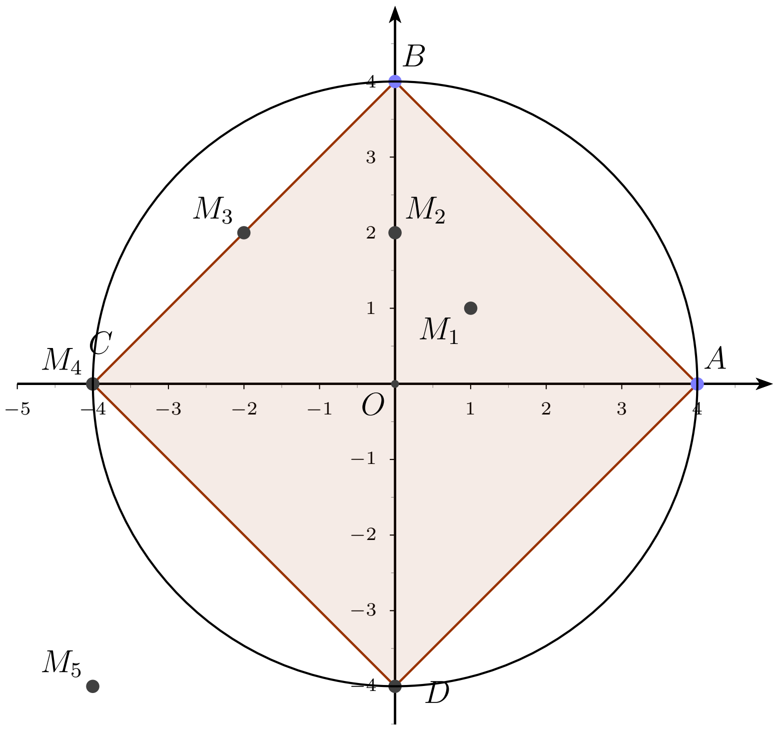
Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Soit A d'affixe 4, le point B d'affixe 4i et C et D tels que ABCD est un carré de centre O. Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = (1+i)^n$.

1. Écrire le nombre $1 + \mathrm{i}$ sous forme exponentielle.

$$\left\{\begin{array}{l} |1+\mathrm{i}| = \sqrt{2} \\ 1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \boxed{1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$$

2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD.



Le carré ABCD de centre O est inscrit dans le centre de centre O et de rayon 4. Un condition suffisante par qu'un point soit à l'extérieur du carré, est qu'il soit à l'extérieur du cercle est donc que $OM_n > 4$.
On va ensuite traiter les autres un par un pour être plus précis mais ce n'était pas demandé.

- **Les points à l'extérieur du cercle**.

$$OM_n > 4 \Longleftrightarrow |1+\mathrm{i}|^n > 4 \Longleftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n > 4$$

En composant par la fonction $\ln$ définie et croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$OM_n > 4 \Longleftrightarrow \ln\left(\sqrt{2}\right)^n > \ln 4$$

On applique alors la propriété $\ln a^n = n \ln a$ définie pour $a > 0$ et n entier :

$$OM_n > 4 \Longleftrightarrow n \ln\left(\sqrt{2}\right) > \ln 4$$

En divisant chaque membre par $\ln\left(\sqrt{2}\right) > 0$:

$$OM_n > 4 \Longleftrightarrow n > \frac{\ln 4}{\ln\left(\sqrt{2}\right)} = 4$$

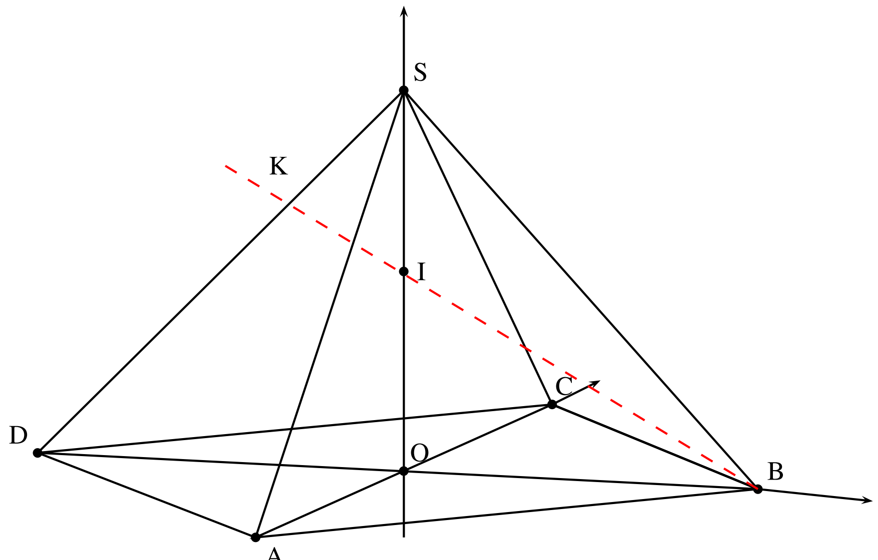
Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels supérieurs ou égaux à 5. Donc tous les points M_n avec $n \geq 5$ sont à l'extérieur du cercle de centre O et de rayon 4, et donc aussi à l'extérieur du carré ABCD qui est inscrit dans ce cercle.

- **Analyse des cas $n = 1, n = 2, n = 3$ et $n = 4$ (non demandé)**.
  - Pour $n = 1$, on a vu que $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et M_1 est clairement dans le carré ABCD.
  - Pour $n = 2$, on a $z_2 = 2\,\mathrm{i}$ et M_2 est clairement dans le carré ABCD car c'est le milieu du segment $[OB]$.
  - Pour $n = 3$, on a $z_3 = -2 + 2\,\mathrm{i}$ et M_3 est clairement dans le carré ABCD car M_3 est le milieu du segment $[BC]$.
  - Pour $n = 4$, on a $z_4 = 4$ et M_4 est clairement dans le carré ABCD car $M_4 = C$.
- **Conclusion**.
  On a montré qu'il existe un entier naturel $n_0 = 5$, tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD. On a même montré (ce n'était pas demandé) qu'il n'y a pas d'entier plus petit que 5 qui vérifie cette propriété.

Exercice 4. Obligatoire - Géométrie dans l'espace 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la pyramide régulière SABCD de sommet S constituée de la base carrée ABCD et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous. Le point O est le centre de la base ABCD avec $OB = 1$. On rappelle que le segment [SO] est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.



1. Justifier que le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{OS}}\right)$ est orthonormé.

- La base ABCD est un carré de centre O donc les diagonales [BD] et [AC] on même mesure et se coupent perpendiculairement en leur milieu. De ce fait les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux et de même norme $OB = 1$.
- Le segment [SO] est la hauteur de la pyramide donc (SO) est perpendiculaire à la base ABCD, donc au plan (OBC). Le vecteur $\overrightarrow{OS}$ est donc orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.
- Il faut alors prouver que $OS = 1$.
  - Le triangle OAB est rectangle isocèle en O avec $OB = OA = 1$. D'après le théorème de Pythagore on a alors facilement :
  $$AB^2 = 2OB^2 = 2 \iff AB = \sqrt{2}$$
  Le côtés de la pyramide régulière SABCD mesurent donc tous $\sqrt{2}$.
  - On se place maintenant dans le triangle SOB, rectangle en O. d'après le théorème de Pythagore on a :
  $$SO^2 = SB^2 - OB^2 = 2 - 1 = 1 \iff SO = 1$$
- Le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{OS}}\right)$ est donc orthonormé.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{OS}}\right)$.

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{\mathrm{SK}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{SD}}$ et on note I le milieu du segment [SO].

2. a. Déterminer les coordonnées du point K.

Dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{OS}}\right)$ on a : $D(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et $S(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{SK}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{SD}} \iff \begin{cases} x_K - 0 &= \frac{1}{3}(-1-0) \\ y_K - 0 &= \frac{1}{3}(0-0) \\ z_K - 1 &= \frac{1}{3}(0-1) \end{cases} \iff \begin{cases} x_K &= -\frac{1}{3} \\ y_K &= 0 \\ z_K &= \frac{2}{3} \end{cases} \iff \boxed{K\left(-\frac{1}{3}\ ;\ 0\ ;\ \frac{2}{3}\right)}$$

2. b. En déduire que les points B, I et K sont alignés.

Dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\text{OB}},\ \overrightarrow{\text{OC}},\ \overrightarrow{\text{OS}}\right)$ on a :

$$\left\{\begin{array}{l} B(1\ ;\ 0\ ;\ 0) \\ I(0\ ;\ 0\ ;\ 0,5) \\ K\left(-\dfrac{1}{3}\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{2}{3}\right) \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BK}\begin{pmatrix} -\dfrac{4}{3} \\ 0 \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$$

On a donc

$$4\overrightarrow{BI} = 3\overrightarrow{BK}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont donc colinéaires, et les points B, I et K sont alignés.

2. c. On note L le point d'intersection de l'arête [SA] avec le plan (BCI). Justifier que (AD) et (KL) sont parallèles.

- Par symétrie, le point K' défini par la relation $\overrightarrow{\text{SK'}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{SA}}$ est aussi aligné avec les points C et I. Le point K' appartient alors à l'arête [SA] et au plan (BCI), c'est en fait le point L. On a la relation :

$$\overrightarrow{\text{SL}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{SA}}$$

- On a alors d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KL} &= \overrightarrow{KS} + \overrightarrow{SL} \\ \overrightarrow{KL} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{DS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} \\ \overrightarrow{KL} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SA}\right) \\ \overrightarrow{KL} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} \end{aligned}$$

Les vecteurs sont colinéaires donc les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

2. d. Déterminer les coordonnées du point L.

Dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\text{OB}},\ \overrightarrow{\text{OC}},\ \overrightarrow{\text{OS}}\right)$ on a :

$$\left\{\begin{array}{l} A(0\ ;\ -1\ ;\ 0) \\ D(-1\ ;\ 0\ ;\ 0) \\ K\left(-\dfrac{1}{3}\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{2}{3}\right) \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} x_L + \dfrac{1}{3} \\ y_L \\ z_L - \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} \iff \left\{\begin{array}{ll} x_L + \dfrac{1}{3} & = \dfrac{1}{3} \\ y_L & = -\dfrac{1}{3} \\ z_L - \dfrac{2}{3} & = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \iff \boxed{L\left(0\ ;\ -\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\right)}$$

3. On considère le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS}\right)$.

3. a. Montrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).

$$\left\{\begin{array}{l} B(1\ ;\ 0\ ;\ 0) \\ C(0\ ;\ 1\ ;\ 0) \\ I\,(0\ ;\ 0\ ;\ 0,5) \end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\0,5\end{pmatrix}$$

Donc

$$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = -1+1+0=0 \Longrightarrow \overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\0,5\end{pmatrix} = -1+0+1=0 \Longrightarrow \overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{BI}$$

Le vecteurs $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BIC), $\overrightarrow{n}$ est donc normal au plan (BCI).

3. b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.

$$\left\{\begin{array}{l} A(0\ ;\ -1\ ;\ 0) \\ D(-1\ ;\ 0\ ;\ 0) \\ S\,(0\ ;\ 0\ ;\ 1) \end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DS}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Donc

$$\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\overrightarrow{DS}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.

3. c. Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?

On a montré lors de la question **(3.a.)** que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI) . Or les vecteurs $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires d'après la question **(3.b.)**

Les plans (SAD) et (BCI) sont donc perpendiculaires.

 ©ISSN 2272-5318

Exercice 4. Spécialité - Matrices et suites — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires. On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne. Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.

1.

1. a. Traduire par une phrase la probabilité $P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=1\right)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes : $P_{(X_n=0)}\left(X_{n+1}=1\right)$, $P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=1\right)$ et $P_{(X_n=2)}\left(X_{n+1}=1\right)$.

- La v.a. X_n est égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage. La probabilité $P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=1\right)$ se traduit donc par :
  « La probabilité d'avoir une boule blanche dans l'urne U à la fin du $(n+1)$-ième tirage, sachant qu'il y avait une boule blanche dans l'urne U au tirage précédant. »
- $P_{(X_n=0)}\left(X_{n+1}=1\right)$ se traduit donc par :
  « La probabilité d'avoir une boule blanche dans l'urne U à la fin du $(n+1)$-ième tirage, sachant qu'il y avait zéro blanche dans l'urne U au tirage précédant. ».
  On est alors dans la configuration ou il y a deux boules noires dans U et deux blanches dans V à la fin du n-ième tirage. Puisque chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne, à la fin du $(n+1)$-ième tirage on aura nécessairement une boule blanche dans l'urne U. Cet évènement est donc certain et
  $$\boxed{P_{(X_n=0)}\left(X_{n+1}=1\right)=1}$$
- $P_{(X_n=2)}\left(X_{n+1}=1\right)$ se traduit donc par :
  « La probabilité d'avoir une boule blanche dans l'urne U à la fin du $(n+1)$-ième tirage, sachant qu'il y avait deux blanches dans l'urne U au tirage précédant. ».
  On est alors dans la configuration ou il y a deux boules noires dans V et deux blanches dans U à la fin du n-ième tirage. Puisque chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne, à la fin du $(n+1)$-ième tirage on aura nécessairement une boule blanche dans l'urne U. Cet évènement est donc certain et
  $$\boxed{P_{(X_n=2)}\left(X_{n+1}=1\right)=1}$$
- $P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=1\right)$ se traduit donc par :
  « La probabilité d'avoir une boule blanche dans l'urne U à la fin du $(n+1)$-ième tirage, sachant qu'il y avait une une blanche dans l'urne U au tirage précédant. ».
  On est alors dans la configuration ou il y a un boule noires et une blanche dans chaque urne à la fin du n-ième tirage, que l'on peut noter BN|BN. On a alors 4 possibilité à la fin du $(n+1)$-ième tirage :

Urne U	Urne V	(n)-ième Tirage	Évènement
BN	BN		$(X_n = 1)$

Urne U	Urne V	$(n+1)$-ième Tirage	Évènement
BB	NN	On a tiré une N de l'urne U et une B de l'urne V	$(X_{n+1}=2)$
BN	NB	On a tiré une N de l'urne U et une N de l'urne V	$(X_{n+1}=1)$
BN	NB	On a tiré une B de l'urne U et une B de l'urne V	$(X_{n+1}=1)$
NN	BB	On a tiré une B de l'urne U et une N de l'urne V	$(X_{n+1}=0)$

L'évènement $(X_{n+1}=1)$ à deux chances sur quatre de se produire et tous les évènements étant équiprobables on a :

$$\boxed{P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=1\right)=\frac{2}{4}=0,5}$$

1. b. Exprimer $P\left(X_{n+1}=1\right)$ en fonction de $P\left(X_n=0\right)$, $P\left(X_n=1\right)$ et $P\left(X_n=2\right)$.
D'après la formule des probabilités totales et en appliquant les résultats de la question (**1.a.**) on a :

$$P\left(X_{n+1}=1\right)=P\Big(\left(X_{n+1}=1\right)\cap\left(X_n=0\right)\Big)+P\Big(\left(X_{n+1}=1\right)\cap\left(X_n=1\right)\Big)+P\Big(\left(X_{n+1}=1\right)\cap\left(X_n=2\right)\Big)$$
$$P\left(X_{n+1}=1\right)=\underbrace{P_{X_n=0}\left(X_{n+1}=1\right)}_{1}\times P(X_n=0)+\underbrace{P_{X_n=1}\left(X_{n+1}=1\right)}_{0,5}\times P(X_n=1)+\underbrace{P_{X_n=2}\left(X_{n+1}=1\right)}_{1}\times P(X_n=2)$$

$$\boxed{P\left(X_{n+1}=1\right)=P(X_n=0)+\frac{1}{2}P(X_n=1)+P(X_n=2)}$$

2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note R_n la matrice ligne définie par : $R_n=\begin{pmatrix}P\left(X_n=0\right) & P\left(X_n=1\right) & P\left(X_n=2\right)\end{pmatrix}$ et on considère M la matrice $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. On note R_0 la matrice ligne $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. On admettra par la suite que, pour tout entier naturel n, $R_{n+1}=R_n\times M$.
Déterminer R_1 et justifier que, pour tout entier naturel n, $R_n=R_0\times M^n$.

- **Déterminons R_1.**
  Pour tout entier naturel n, $R_{n+1}=R_n\times M$ donc

$$R_1=R_0\times M=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\boxed{R_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}}$$

- **Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $R_n=R_0\times M^n$.**
  Notons pour tout entier naturel $n\geq 0$ le postulat

$$(P_n)\ :\ R_n=R_0\times M^n$$

  - **Initialisation**
    Pour $n=0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :

$$R_0\times M^0=R_0\times Id=R_0$$

  - **Hérédité**
    Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

$$R_{n+1}=R_n\times M$$

    On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que $R_n=R_0\times M^n$.

$$R_{n+1}=(R_0\times M^n)\times M=R_0\times M^{n+1}$$

    On a alors montré que $R_{n+1}=R_0\times M^{n+1}$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.
  - **Conclusion**
    On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n\geq 0$.

$$\boxed{R_n=R_0\times M^n}$$

©ISSN 2272-5318

3. On admet $M = P \times D \times P^{-1}$: $P = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Établir que, pour tout entier naturel n, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(P'_n) \ : \ M^n = P \times D^n \times P^{-1}$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, le postulat (P'_0) est vrai puisque :

$$\begin{cases} M^0 = Id \\ P \times D^0 \times P^{-1} = P \times Id \times P^{-1} = P \times P^{-1} = Id \end{cases}$$

- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P'_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

$$M^{n+1} = M^n \times M$$

  On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P'_n) soit vérifié et donc que $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= \left(P \times D^n \times P^{-1}\right) \times \left(P \times D \times P^{-1}\right) \\ M^{n+1} &= P \times D^n \times \underbrace{P^{-1} \times P}_{Id} \times D \times P^{-1} \\ M^{n+1} &= P \times \underbrace{D^n \times Id \times D}_{D^{n+1}} \times P^{-1} \\ M^{n+1} &= P \times D^{n+1} \times P^{-1} \end{aligned}$$

  On a alors montré que $M^{n+1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$ et donc que $\left(P'_{n+1}\right)$ est vrai.

- **Conclusion**
  On a montré que (P'_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P'_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, $\left(P'_{n+1}\right)$ est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{M^n = P \times D^n \times P^{-1}}$$

On admettra que, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.

4. a. Calculer $D^n \times P^{-1}$ en fonction de n.

$$\underline{D^n \times P^{-1}} = \begin{pmatrix} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n & -2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n & \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}}$$

4. b. Sachant que $R_0P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n.

- Lors de la question **(2.)** on a montré que pour tout entier n, $R_n = R^0 \times M^n$.
- Lors de la question **(3.)** on a montré que pour tout entier n, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.
- Lors de la question **(4.a)** on a montré que pour tout entier n, $D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & -2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

De ce fait pour tout entier n,

$$\begin{aligned} R_n &= R^0 \times M^n \\ R_n &= R^0 \times P \times D^n \times P^{-1} \\ R_n &= \underbrace{R^0 \times P} \times \underbrace{D^n \times P^{-1}} \\ R_n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & -2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{R_n = \begin{pmatrix} \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3} + \dfrac{1}{6} & \dfrac{-2\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3} + \dfrac{2}{3} & \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3} + \dfrac{1}{6} \end{pmatrix}}$$

5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 2)$. Interpréter ces résultats.

Par théorème

Théorème 3

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

De ce fait, ici $-1 < q = -\frac{1}{2} < 1$ et d'après le théorème 3 :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Ce qui nous donne les limites des termes de la matrice ligne Rn.

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6} \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} R_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}}$$

Or pour $n \in \mathbb{N}^*$, R_n est la matrice ligne définie par : $R_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) & P(X_n = 1) & P(X_n = 2) \end{pmatrix}$. Cela signifie donc qu'après un très grand nombre de tirages, la probabilité d'avoir une boule blanche dans l'urne U est de $\frac{2}{3}$, d'en avoir aucune $\frac{1}{6}$ et d'en avoir deux de $\frac{1}{6}$.