Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2015 - ES/L Métropole - Réunion

Série ES/L Obli. et Spé.
24 Juin 2015
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

Exercice 1. Probabilités — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

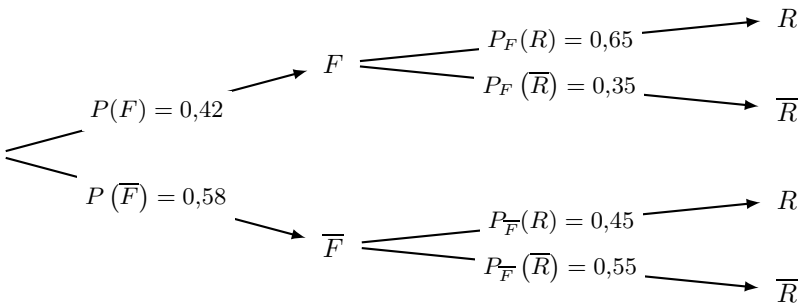
On note :

- F : l'événement : « La personne est une femme » ;
- R : l'événement : « La personne repart sans rien acheter » ;

D'après les données on a donc :

- $P(F) = 0,42$ et $P\left(\overline{F}\right) = 0,58$ car « *la clientèle est composée de 42% de femmes* » ;
- $P_F\left(\overline{R}\right) = 0,35$ et $P_F(R) = 0,65$ car « *35% des femmes qui entrent dans le magasin y effectuent un achat* » ;
- $P_{\overline{F}}\left(\overline{R}\right) = 0,55$ et $P_{\overline{F}}(R) = 0,45$ car « *cette proportion est de 55% pour les hommes.* » ;

De ce fait l'arbre est le suivant :



2. Calculer la probabilité que la personne qui est entrée dans le magasin soit une femme et qu'elle reparte sans rien acheter.

On cherche à calculer la probabilité de l'évènement : $(F \cap R)$.

$$P(F \cap R) = P(F) \times P_F(R)$$
$$P(F \cap R) = 0{,}42 \times 0{,}65$$

Donc

$$\boxed{P(F \cap R) = 0{,}273}$$

3. Montrer que $P(R) = 0,534$.

On cherche $P(R)$ or d'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(R \cap F) + P\left(R \cap \overline{F}\right)$$
$$P(R) = P(F) \times P_F(R) + P\left(\overline{F}\right) \times P_{\overline{F}}(R)$$
$$P(R) = 0{,}42 \times 0{,}65 + 0{,}58 \times 0{,}45$$
$$P(R) = 0{,}273 + 0{,}261$$

Soit

$$\boxed{P(R) = 0{,}534}$$

Partie B

On note X la variable aléatoire qui, à chaque téléphone mobile de type T1 prélevé au hasard dans la production, associe sa durée de vie, en mois. On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 48$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

1. **Justifier que la probabilité que le téléphone de type T1 prélevé fonctionne plus de 3 ans, c'est-à-dire 36 mois, est d'environ 0,885.**

La probabilité cherchée est donc $P(X > 36)$.

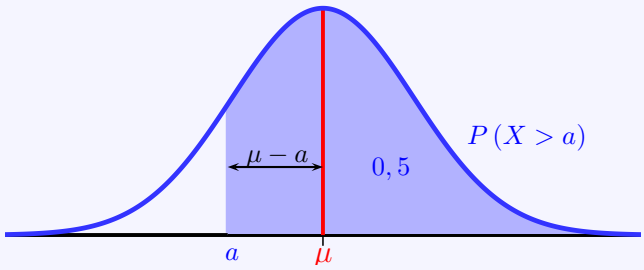
Propriété 1 ($P(X > a)$; $a < \mu$)

Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors on a :

$$P(X < \mu) = 0,5 = P(X > \mu)$$

De plus pour tout réel a avec $a < \mu$:

$$\boxed{P(X > a) = P(a < X < \mu) + 0,5}$$



Puisque X suit la loi normale d'espérance $\mu = 48$ et d'écart-type $\sigma = 10$, on va appliquer la propriété 1 avec : $a = 36 > \mu = 48$ donc :

$$P(X > 36) = P(36 < X < 48) + 0,5$$

La calculatrice donne alors le résultat :

$$\boxed{P(X > 36) \approx 0,885}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.normFDR}(36, 48, 48, 10) + 0,5 \approx 0{,}884\,930\,268\,943$$

2. **On sait que le téléphone de type T1 prélevé a fonctionné plus de 3 ans. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne moins de 5 ans ?**

On cherche $P_{X\geq 36}(36 \leq X \leq 60)$.
Or l'évènement $(X \geq 36) \cap (36 \leq X \leq 60)$ est égal à l'évènement $(36 \leq X \leq 60)$, de ce fait on a :

$$P_{X\geq 36}(36 \leq X \leq 60) = \frac{P((X \geq 36) \cap (36 \leq X \leq 60))}{(X \geq 36)}$$
$$P_{X\geq 36}(36 \leq X \leq 60) = \frac{P((36 \leq X \leq 60))}{(X \geq 36)}$$
$$P_{X\geq 36}(36 \leq X \leq 60) \approx \frac{0,76986}{0,885}$$

$$\boxed{P_{X\geq 36}(36 \leq X \leq 60) \approx \frac{0,76986}{0,885} \approx 0,870}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.normFDR}(36, 60, 48, 10) \approx 0{,}769\,860\,536\,836$$

Partie C

Le gérant du magasin émet l'hypothèse que 30% des personnes venant au magasin achètent uniquement des accessoires (housse, chargeur ...). Afin de vérifier son hypothèse, le service marketing complète son étude.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence de personnes ayant uniquement acheté des accessoires dans un échantillon de taille 1 500.

- **1. Analyse des données** :
  - « *On a un échantillon de* $n = 1500$ *personnes* ».
  - Le gérant du magasin émet l'hypothèse que $\underline{p = 30\%}$ des personnes venant au magasin achètent uniquement des accessoires.
- **2. Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 1\,500$, $p = 30\ \%$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 1500 \geq 30 \\ \checkmark & np = 1500 \times 0{,}3 = 450 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 1500 \times 0{,}7 = 1050 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}3 - 1,96\,\frac{\sqrt{0{,}3 \times 0{,}7}}{\sqrt{1500}}\ ;\ 0{,}3 + 1,96\,\frac{\sqrt{0{,}3 \times 0{,}7}}{\sqrt{1500}}\right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}27681$. On arrondit la borne inférieure par défaut 10^{-3} près soit $\underline{0{,}276}$.
- $p + 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}32319$. On arrondit la borne supérieure par excès 10^{-3} près soit $\underline{0{,}324}$.

$$\boxed{I_{1500} \approx [0{,}276\ ;\ 0{,}324]}$$

2. Le service marketing interroge un échantillon de 1 500 personnes. L'étude indique que 430 personnes ont acheté uniquement des accessoires. Doit-on rejeter au seuil de 5% l'hypothèse formulée par le gérant ?

430 personnes sur 1 500 ont acheté uniquement des accessoires donc la fréquence observée est de :

$$f = \frac{430}{1500} \approx 0,287 \in [0,276\,;\,0,324]$$

On a $f \in I_{1500}$ donc on <u>ne peut donc pas rejeter</u>, au seuil de 5% , l'hypothèse formulée par le gérant.

Exercice 2. Obligatoire ES et Spé L : Suites — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

On modélise le tarif pour le forage du premier puits par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = 2\,000 \times 1,008^{n-1}$$

où u_n représente le coût en euros du forage de la n-ième dizaine de mètres.
Dans tout l'exercice, arrondir les résultats obtenus au centième.

1. Calculer u_3 puis le coût total de forage des 30 premiers mètres.
Remarque : Attention au décalage d'indice pour la puissance.

$$u_3 = 2\,000 \times 1,008^2 \approx \underline{2\,032{,}13}$$

Le coût total de forage des 30 premiers mètres est la somme des coûts pour la 1-ère dizaine de mètres, 2-ème dizaine de mètres et 3-ème dizaine de mètres :

$$\boxed{u_1 + u_2 + u_3 \approx 6\,048{,}13€}$$

2. Pour tout entier naturel n non nul :

2. a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_nn et préciser la nature de la suite (u_n).
Pour tout entier naturel n non nul :

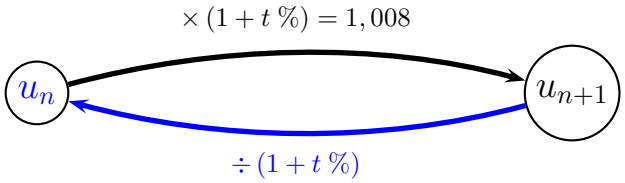
$$u_{n+1} = 2\,000 \times 1,008^n = \underbrace{\left(2\,000 \times 1,008^{n-1}\right)}_{u_n} \times 1,008$$

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ ; \ u_{n+1} = 1,008 \times u_n}$$

La suite (u_n) est donc une *suite géométrique* de <u>raison $q = 1,008$</u> et de premier terme $u_1 = 2\,000$.

2. b. En déduire le pourcentage d'augmentation du coût du forage de la $(n+1)$-ième dizaine de mètres par rapport à celui de la n-ième dizaine de mètres.



On passe de u_n à u_{n+1} en multipliant par le coefficient multiplicateur $q = 1,008$ ce qui d'après le cours correspond à une augmentation de :

$$t\% = q - 1 = 0,008 = \underline{0,8\%}$$

3. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
INITIALISATION
u prend la valeur 2 000
S prend la valeur 2 000
TRAITEMENT
Saisir n
Pour i allant de 2 à n
        u prend la valeur u × 1,008
        S prend la valeur S + u
Fin Pour
SORTIE
Afficher S
```

La valeur de n saisie est 5.

3. a. Faire fonctionner l'algorithme précédent pour cette valeur de n.

Valeur de i		2	3	4	5
Valeur de u	2 000,00	2 016,00	2 032,13	2 048,39	2 064,77
Valeur de S	2 000,00	4 016,00	6 048,13	8 096,51	10 161,29

3. b. Quelle est la valeur de S affichée en sortie ? Interpréter cette valeur dans le contexte de cet exercice.
La valeur de S affichée en sortie est $S \approx 10\,161{,}29$ ce qui, dans le contexte de cet exercice, correspond au coût total de forage des 50 premiers mètres soit 10 161,29 euros.

4. On note $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ la somme des n premiers termes de la suite (u_n), n étant un entier naturel non nul. On admet que : $S_n = -250\,000 + 250\,000 \times 1,008^n$.

4. a. Calculer la profondeur maximale par la méthode de votre choix pour que le budget de 125 000 euros soit respecté.

- **Méthode 1 : calculatrice**
La suite (S_n) correspond à la somme des n premiers termes de la suite (u_n) donc les termes de la suite (S_n) nous donnent le coût de n dizaines de mètres de forage.

Il suffit alors en utilisant la fonction TABLE de la calculatrice, de déterminer les valeurs de la suite (S_n) .

n	46	47	48	49	50	51	52
S_n	110 682,01	113 567,47	116 476,01	119 407,82	122 363,08	125 341,98	128 344,72

Toutes les valeurs avant u_{50} sont bien inférieures à 125 000 et on a :

$$\begin{cases} u_{50} \approx 122\,363{,}08 < 125\,000 \\ u_{51} \approx 125\,341{,}98 > 125\,000 \end{cases}$$

On peut donc dire que la profondeur maximale du puits que l'on peut espérer avec ce budget de 125 000 euros est de 50 dizaines de mètres soit 500 mètres.

- **Méthode 2 : inéquation**
On va résoudre dans l'ensemble des entiers naturels non nuls l'inéquation

$$S_n = -250\,000 + 250\,000 \times 1,008^n < 125\,000$$

Pour tout entier naturels n non nul :

$$\begin{aligned} S_n = -250\,000 + 250\,000 \times 1,008^n < 125\,000 &\Longleftrightarrow 250\,000 \times 1,008^n < 375\,000 \\ &\Longleftrightarrow 1,008^n < \frac{375\,000}{250\,000} = 1,5 \end{aligned}$$

En composant par la fonction $\ln$ définie et croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$S_n < 125\,000 \Longleftrightarrow \ln 1,008^n < \ln 1,5$$

On applique alors la propriété $\ln a^n = n \ln a$ définie pour $a > 0$ et n entier :

$$S_n < 125\,000 \Longleftrightarrow n \ln 1,008 < \ln 1,5$$

En divisant chaque membre par $\ln 1,008 > 0$, l'ordre ne change pas et :

$$S_n < 125\,000 \Longleftrightarrow n < \frac{\ln 1,5}{\ln 1,008} \approx 50,88$$

Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à 50.

$$\boxed{S = \{1\ ;\ 2\ ;\ \cdots\ ;\ 49\ ;\ 50\}}$$

On peut donc dire que la profondeur maximale du puits que l'on peut espérer avec ce budget de 125 000 euros est de 50 dizaines de mètres soit 500 mètres.

4. b. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il permette de répondre au problème posé.

INITIALISATION
u prend la valeur 2 000
S prend la valeur 2 000
i prend la valeur 0
TRAITEMENT
TANT QUE $S < 125\,000$ FAIRE
    u prend la valeur $u \times 1,008$
    S prend la valeur $S + u$
    i prend la valeur $i + 1$
FIN TANT QUE
SORTIE
Afficher $10 \times i$

Avec Algobox par exemple on obtient :

```
VARIABLES
s EST_DU_TYPE NOMBRE
i EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  u PREND_LA_VALEUR 2000
  s PREND_LA_VALEUR 2000
  i PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (s<125000) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    u PREND_LA_VALEUR 1.008*u
    s PREND_LA_VALEUR s+u
    i PREND_LA_VALEUR i+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHERCALCUL 10*i
FIN_ALGORITHME
```

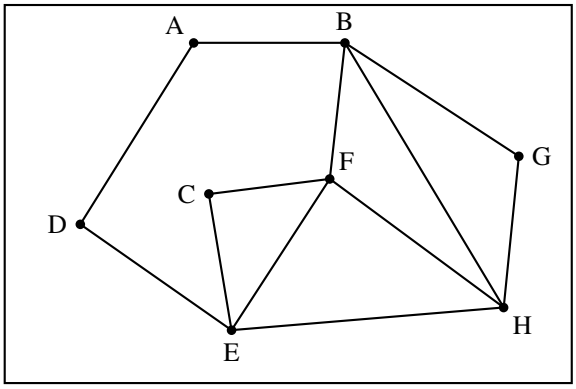
 ©ISSN 2272-5318

Exercice 2. Spécialité : Graphes — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous :



1. Déterminer en justifiant si ce graphe :

1. a. est connexe ;

Définition 1 (Graphe connexe)

Un graphe est dit **connexe** si quels que soient les sommets u et v, il existe une chaîne de u vers v. C'est-à-dire, s'il existe une suite d'arêtes permettant d'atteindre v à partir de u.

Dans le graphe proposé, il existe une chaîne entre chacun des sommets. La chaîne :

$$A - B - G - H - F - C - E - D$$

permet de passer par tous les sommets.
Par conséquent le graphe $\mathcal{G}$ est connexe.

1. b. admet une chaîne eulérienne.
Citons le théorème d'Euler

Théorème 2 (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

- Un graphe connexe contient une *chaîne eulérienne* si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
- Un graphe connexe contient un *cycle eulérien* si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair).

Remarque : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse Leonhard d'Euler (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Étudions le degré de chacun des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	2	4	2	2	4	4	2	4

Donc tous les sommets sont de degré pair. Par conséquent, d'après le théorème 2, ce graphe connexe admet une chaine eulérienne et même un cycle eulérien.

2. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. On donne :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & a_{52} = 5 & 6 & 5 & 4 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 3 & 8 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 3 & 2 & 9 & 9 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Donner, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à B.
Rappelons que :

Définition 2 (Matrice d'adjacence d'un graphe)

Considérons un graphe G (orienté), d'ordre n. On numérote les sommets de G de 1 à n. On appelle matrice d'adjacence associée à G la matrice M dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arêtes (orientées) allant du sommet i vers le sommet j.

Propriété 2 (Matrice d'adjacence et nombre de chaînes)

Si M est la matrice d'adjacence associée à un graphe orienté dont les sommets sont numérotés et p désigne un nombre entier naturel.
Le terme a_{ij} (ligne i et colonne j) de la matrice M^p donne le nombre de chaînes de longueur p reliant i à j.

Ici, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à B est donc donné par le coefficient $a_{52} = 5$ de la matrice réelle symétrique M^3.
Il y a donc 5 chemins de longueur 3 reliant E à B.

Partie B

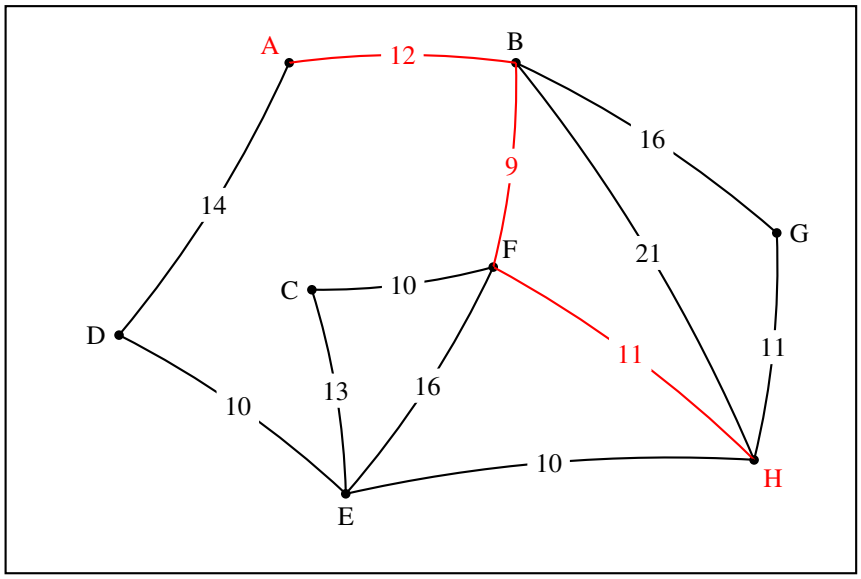
1. D'après l'étude effectuée dans la partie A, le club alpin est-il en mesure de proposer :

1. a. un itinéraire au départ du refuge A qui passerait par tous les refuges en empruntant une fois et une seule fois chacun des sentiers ? Si oui, proposer un tel itinéraire ;
D'après la question **A.1.b.**, le graphe possède une chaîne eulérienne. On peut donc passer par tous les refuges en empruntant une fois et une seule fois chacun des sentiers. On peut prendre l'itinéraire :

$$\boxed{A - B - G - H - B - F - H - E - F - C - E - D - A}$$

1. b. des itinéraires de trois jours (un jour correspondant à une liaison entre deux refuges) reliant le refuge E au refuge B ? Si oui, combien peut-il en proposer ?
D4après la question **A.2.**, il existe 5 chemins de longueur 3 reliant E à B.
Il existe donc 5 itinéraires de 3 jours reliant le refuge E au refuge B.

2. Le graphe $\mathcal{G}$ est complété ci-dessous par la longueur en kilomètres de chacun des sentiers.



Le club alpin désire aussi proposer à ses membres l'itinéraire le plus court reliant A à H.
Déterminer cet itinéraire et en préciser la longueur en kilomètres.
Pour cela appliquons l'algorithme de Dijkstra.

Remarque *: L'algorithme porte le nom de son inventeur, l'informaticien néerlandais Edsger Dijkstra (1930-2002), et a été publié en 1959.*

de .. à	à B	à C	à D	à E	à F	à G	à H
A	**12A**	∞	14A	∞	∞	∞	∞
$B(12A)$	-	∞	**14A**	∞	21B	28B	33B
$D(14A)$	-	∞	-	24D	**21B**	28B	33B
$F(21B)$	-	31F	-	**24D**	-	28B	32F
$E(24D)$	-	31F	-	-	-	**28B**	32F
$G(28B)$	-	**31F**	-	-	-	-	32F
$C(31F)$	-	-	-	-	-	-	**32F**
$H(32F)$	-	-	-	-	-	-	-

Le chemin le plus court pour relier A à H est :

$$\boxed{A \xrightarrow{12} B \xrightarrow{9} F \xrightarrow{11} H}$$

Il est de longueur 32 kilomètres.

Exercice 3. Fonction — 6 points

Commun à tous les candidats

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente dans un repère orthogonal une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,3]$. Les points A d'abscisse -3 et $B(0\,;\,2)$ sont sur la courbe $\mathscr{C}$. Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ respectivement aux points A et B, la tangente au point A étant horizontale.

Partie A

1. Par lecture graphique, déterminer :

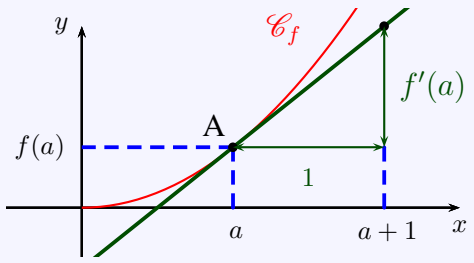
1. a. $f'(-3)$;
La tangente au point A d'abscisse -3 est horizontale donc : $\underline{f'(-3) = 0}$.

1. b. $f(0)$ et $f'(0)$;
On rappelle que :

Propriété 3 (Tangente à $\mathscr{C}_f$ en A)

Si f est dérivable en a alors, la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et qui a pour cœfficient directeur $f'(a)$.
Son équation est donnée par :

$$\boxed{T\ :\ y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$



- Le point $B(0\,;\,2)$ appartient à la courbe $(\mathscr{C})$ donc : $\underline{f(0) = 2}$;
- La tangente à $(\mathscr{C})$ au point $B(0\,;\,2)$ passe aussi par le point $C(-1\,;\,5)$ donc son coefficient directeur, qui est aussi le nombre dérivé de f en 0 est :

$$f'(0) = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{5-2}{-1-0} = -3 \Rightarrow \boxed{f'(0) = -3}$$

2. La fonction f est définie sur $[-4\,;\,3]$ par $f(x) = a + (x+b)\,\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel de $[-4\,;\,3]$.

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [-4\,;\,3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = (x+b) \times \mathrm{e}^{-x} + a \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable sur $[-4\,;\,3]$ comme produit, composée et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
La fonction f est de la forme $uv + a$ donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [-4\,;\,3]\ ;\ f(x) = u(x) \times v(x) + a\ :\ \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = (x+b) & ; & u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-x} & ; & v'(x) = (-\mathrm{e}^{-x}) \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-4\,;\,3]\,,\ \ f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+b) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ f'(x) &= \mathrm{e}^{-x}\,(1 - x - b) \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [-4\,;\,3]\ ;\ f'(x) = (-x - b + 1)\,\mathrm{e}^{-x}}$$

2. b. À l'aide des questions 1.b. et 2.a., montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant : $\left\{\begin{array}{ll} a+b & =2 \\ 1-b & =-3 \end{array}\right.$.

- D'après la question **1.b.** $f(0)=2$ or

$$\forall x \in [-4\,;\,3]\ ;\ f(x)=a+(x+b)\,\mathrm{e}^{-x}$$

Donc on a :

$$f(0)=2 \Longleftrightarrow a+(0+b)\,\mathrm{e}^{-0}=2 \Longleftrightarrow \underline{a+b=2}$$

- D'après la question **1.b.** on a aussi : $f'(0)=-3$ or on a montré à la question **2.a.** que :

$$\forall x \in [-4\,;\,3]\ ;\ f'(x)=(-x-b+1)\,\mathrm{e}^{-x}$$

Donc :

$$f'(0)=-3 \Longleftrightarrow (-0-b+1)\,\mathrm{e}^{-0}=-3 \Longleftrightarrow \underline{1-b=-3}$$

- **Conclusion** : les nombres a et b vérifient le système :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll} a+b & =2 \\ 1-b & =-3 \end{array}\right.}$$

2. c. Déterminer alors les valeurs des nombres a et b.
En sommant les deux égalités on a facilement :

$$\left\{\begin{array}{lll} a+b & =2 & :\ (E_1) \\ 1-b & =-3 & :\ (E_2) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} a+b & =2 & :\ (E_1) \\ a+1 & =-1 & :\ (E_1)+(E_2) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} b & =2-a \\ a & =-2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{ll} b & =4 \\ a & =-2 \end{array}\right.}$$

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $[-4\,;\,3]$ par $f(x)=-2+(x+4)\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. Justifier que, pour tout réel x de $[-4\,;\,3]$, $f'(x)=(-x-3)\,\mathrm{e}^{-x}$ et en déduire le tableau de variation de f.

- **Dérivée de f.**
Lors de la question **A.2.a.** on a montré que pour f définie sur $[-4\,;\,3]$ par :

$$\forall x \in [-4\,;\,3]\ ;\ f(x)=a+(x+b)\,\mathrm{e}^{-x}$$

Alors :

$$\forall x \in [-4\,;\,3]\ ;\ f'(x)=(-x-b+1)\,\mathrm{e}^{-x}$$

Donc en appliquant ce résultat avec $a=-2$ et $b=4$ on a directement :

$$\forall x \in [-4\,;\,3]\ ;\ f'(x)=(-x-4+1)\,\mathrm{e}^{-x}=\underline{(-x-3)\,\mathrm{e}^{-x}}$$

- **Variations de f.**

$$\forall x \in [-4\,;\,3]\ ;\ f'(x) = (-x-4+1)\,\mathrm{e}^{-x} = (-x-3)\,\mathrm{e}^{-x}$$

La dérivée de f s'exprime comme un produit de deux facteurs, donc l'un est strictement positif. En effet, l'exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, à fortiori sur $[-4\,;\,3]$ on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$.
De ce fait, $f'(x)$ est du signe du facteur $(-x-3)$ dont l'étude est aisée.

$$\forall x \in [-4\,;\,3]\ ;\ \begin{cases} (-x-3) = 0 & \Longleftrightarrow x = -3 \in [-4\,;\,3] \\ (-x-3) > 0 & \Longleftrightarrow -4 < x \leq -3 \\ (-x-3) < 0 & \Longleftrightarrow -3 \leq x < 3 \end{cases}$$

De ce fait, f est croissante sur $[-4\,;\,-3]$ et décroissante sur $[-3\,;\,3]$. On peut dresser le tableau de variations de f en calculant les valeurs aux bornes.

$$\forall x \in [-4\,;\,3]\ ;\ f(x) = -2 + (x+4)\,\mathrm{e}^{-x}$$

x	-4	-3	3
$f(x)$	-2	$\mathrm{e}^{3} - 2 \approx 18,1$	$7\,\mathrm{e}^{-3} - 2 \approx -1,65$

x	-4		-3		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	-2	$\nearrow$	$e^3 - 2$	$\searrow$	$7\,\mathrm{e}^{-3} - 2$

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3\ ;\ 3]$, puis donner une valeur approchée de α à 0,01 près par défaut.

Théorème 3 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).

Application du corollaire :

- La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[-3\,;\,3]$;
- L'image par f de l'intervalle $[-3\,;\,3]$ est $[g(3)\,;\,g(-3)]$ d'après le tableau de variations.
- Le réel $k = 0$ appartient à l'intervalle image car :

$$g(3) \approx -1,65 < 0 < f < g(-3) \approx 18,1$$

Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[-3\,;\,3]$.

Valeur approchée de la solution.
Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

- Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient : $\left\{\begin{array}{lcl} f\,(0,89) & \approx & 0,00811 > 0 \\ f\,(0,90) & \approx & -0,0078 < 0 \end{array}\right|$, donc $0,89 < \alpha < 0,90$.

Une valeur approchée de α à 0.01 près par défaut est donc $\alpha \approx 0,89$.

3. On souhaite calculer l'aire S, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -3$ et $x = 0$.

$$\forall x \in [-4\,;\,3]\ ;\ f(x) = -2 + (x+4)\,\mathrm{e}^{-x}$$

3. a. Exprimer, en justifiant, cette aire à l'aide d'une intégrale.

La fonction f est *continue* dont intégrable sur $[-4\,;\,3]$.
De plus d'après l'étude précédente on a :

x	-4		-3		0		$\alpha \approx 0,89$		3
$f'(x)$		$+$	0			$-$			
f	-2	$\nearrow$	$e^3 - 2$	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$7\,\mathrm{e}^{-3} - 2$

De ce fait, f est décroissante strictement sur $[-3\,;\,0]$ avec un minimum en 0 qui vaut $f(0) = 2 > 0$.
La fonction f est donc strictement *positive* sur l'intervalle $[-3\,;\,0]$.
L'aire S, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -3$ et $x = 0$ est donc l'intégrale de f entre -3 et 0. Soit :

$$\boxed{S = \int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} \left(-2 + (x+4)\,\mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x}$$

3. b. À l'aide de ces résultats, calculer la valeur exacte de l'aire S puis sa valeur arrondie au centième.

D'après le logiciel, la dérivée de la fonction :

$$x \mapsto -2x + (-x-5)\,\mathrm{e}^{-x}$$

est la fonction :

$$x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x} + 4\,\mathrm{e}^{-x} - 2$$

or c'est dernière est l'expression de la fonction f car en factorisant par e^{-x} on retrouve bien :

$$x \mapsto -2 + (x+4)\,\mathrm{e}^{-x} = f(x)$$

On vient donc d'exhiber une fonction dont la dérivée est f, c'est à dire une primitive de f sur $[-4\,;\,3]$.
On peut donc calculer l'intégrale précédente :

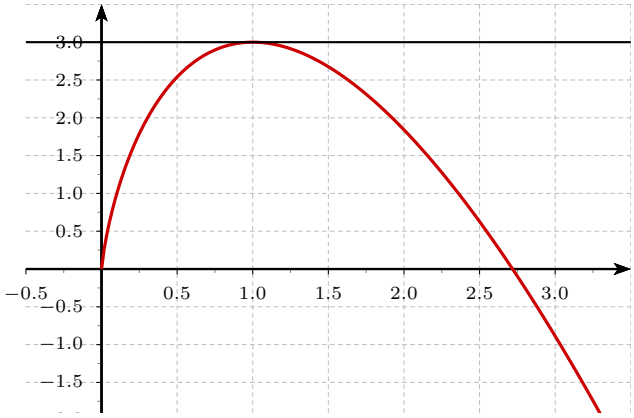
$$\begin{aligned}
S &= \int_{-3}^{0} \left(-2 + (x+4)\,\mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x \\
S &= \left[\ -2x + (-x-5)\,\mathrm{e}^{-x}\ \right]_{-3}^{0} \\
S &= -2 \times 0 + (-0-5)\,\mathrm{e}^{-0} - \left(-2 \times (-3) + (3-5)\,\mathrm{e}^{3}\right) \\
S &= -5 - 6 + 2\,\mathrm{e}^{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{S = -11 + 2\,\mathrm{e}^{3} \approx 29,17 \text{ u.a.}}$$

Exercice 4. Exercice de recherche : Fonction — 3 points

Commun à tous les candidats
On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = 3x - 3x\ln(x)$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
Quelle est la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T ?

- **Position du problème** :



En traçant la courbe de f sur la calculatrice et on peut facilement conjecturer sa concavité.
Une autre méthode plus classique (mais plus longue) est d'étudier le signe de $f(x) - (ax+b)$ où $y = (ax+b)$ est l'équation de T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

- **Méthode 1 : On étudie la convexité de f**. On rappelle que :

Proposition 1 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

– La fonction f est <u>convexe</u> (resp. *concave*) si et seulement si sa courbe représentative est <u>au-dessus</u> (resp. *au-dessous*) de chacune de ses tangentes ;

Proposition 2 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
f est concave si et seulement si **sa dérivée seconde f'' est à valeurs négatives ou nulles**.

– **Calculons la dérivée de f.**
Remarquons tous d'abord que f s'écrit aussi :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl}]0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = (1-\ln x)\times(3x) \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
La fonction f est de la forme $uv+2$ donc de dérivée $u'v+uv'$ avec :

$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[\ ;\ f(x) = u(x)\times v(x) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = (1-\ln x) & ; & u'(x) = -\dfrac{1}{x} \\ v(x) = (3x) & ; & v'(x) = 3 \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0\,;\,+\infty[,\quad f'(x) &= u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x) \\ f'(x) &= -\frac{1}{x}\times(3x) + (1-\ln x)\times 3 \\ f'(x) &= -3 + 3 - 3\ln x \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in]0\,;\,+\infty[\ ;\ f'(x) = -3\ln x}$$

– **Étude de la convexité**.
La fonction f' est aussi dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on a facilement :

$$\forall x \in\,]0\,;\,+\infty[\ ;\ f''(x) = -3 \times \frac{1}{x}$$

De ce fait, la dérivée seconde est clairement strictement négative sur $]0\,;\,+\infty[$.
Par application de la proposition 2, la fonction f est donc *concave* sur $]0\,;\,+\infty[$.
Puis par application de la proposition 1, la fonction f est étant *concave* sur $]0\,;\,+\infty[$, sa courbe est au *dessous de chacune de ses tangentes*.

– **Conclusion** :
La courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessous de chacune de ses tangentes, donc $\mathcal{C}_f$ est au dessous de T.

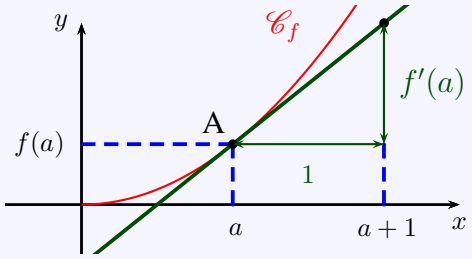
- **Méthode 2 : Étude de $g(x) = f(x) - (ax + b)$**
On a vu que :

$$\forall x \in\,]0\,;\,+\infty[\ ;\ f'(x) = -3\ln x$$

Propriété 4 (Tangente à $\mathscr{C}_f$ en A)

Si f est dérivable en a alors, la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et qui a pour cœfficient directeur $f'(a)$.
Son équation est donnée par :

$$\boxed{T\ :\ y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$



On cherche l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a = 1$. Cette équation est d'après la propriété précédente :

$$y = f'(1)(x-1) + g(1)\ \ ;\ \ \text{avec}\ \begin{cases} f(1) & = 3 \\ f'(1) & = 1 \end{cases}$$

$$y = 3$$

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a = 1$ est donc la droite horizontale d'équation $y = 3$.
On va alors chercher à étudier sur $\mathbb{R}_+^*$ le signe de :

$$f(x) - 3 = 3x - 3x\ln(x) - 3$$

On introduit alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = f(x) - 3 = 3x - 3x\ln(x) - 3$.
La fonction g à la même dérivé que f et donc :

$$\forall x \in\,]0\,;\,+\infty[\ ;\ g'(x) = f'(x) = -3\ln x$$

On étudie alors le signe de $g'(x)$.

– On a pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty]$:

$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow -3\ln x = 0$$
$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 0$$

En composant par la fonction exp définie sur $\mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \mathrm{e}^{\,0} = 1$$

soit

$$\forall x \in\,]0\,;\,+\infty[\ ;\ \boxed{g'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1}$$

– En outre pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty]$:

$$g'(x) > 0 \Longleftrightarrow -3\ln x > 0$$
$$g'(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln x < 0$$

La fonction exp étant croissante sur $\mathbb{R}$, on a par composition :

$$g'(x) > 0 \Longleftrightarrow x < 1$$

$$\forall x \in\,]0\,;\,+\infty[\ ;\ \boxed{g'(x) > 0 \Longleftrightarrow 0 < x < 1}$$

En conséquence :

$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[\ ;\ \boxed{\left.\begin{array}{l} g'(x) > 0 \Longleftrightarrow 0 < x < 1 \\ g'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow\ g'(x) < 0 \Longleftrightarrow x > 1}$$

La fonction g est donc croissante sur $]0\,;\,1]$ et décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$. On a donc :

$$\forall x \in]\,;\,+\infty[\ ;\ g(x) = f(x) - 3 = 3x - 3x\ln(x) - 3$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		$\nearrow$	$g(1) = 0$	$\searrow$	

On peut ici directement conclure.
Le maximum de g sur $]0\,;\,+\infty[$ est donc $g(1) = 0$ ce qui implique que g soit négative ou nulle sur cet intervalle soit :

$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[\ ;\ g(x) \leq 0 \Longleftrightarrow \forall x \in]\,;\,+\infty[\ ;\ f(x) \leq 3$$

Conclusion :
La courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessous de T, sa tangente horizontale au point d'abscisse 1, d'équation $y = 3$.