Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2014 - ES/L
Nouvelle Calédonie

Série ES/L Spécialité
Vendredi 7 Mars 2014
Correction

Exercice 1. Probabilités — 5 points

	F	G	Total
R	8	12	20
A	9	11	20
Total	17	23	40

On choisit un élève au hasard, chaque élève ayant la même probabilité d'être choisi, on est dans une situation d'équiprobabilité.

1. Calculons les probabilités demandées :

- Il y a 23 garçons pour 40 élèves donc : $\boxed{P(G) = \dfrac{23}{40} = 0,575}$;
- Il y a 12 garçons qui font du russe donc : $\boxed{P(R \cap G) = \dfrac{12}{40} = \dfrac{3}{10} = 0,3}$;
- Il y a 20 élèves qui font du russe donc : $\boxed{P(R) = \dfrac{20}{40} = \dfrac{1}{2} = 0,5}$.

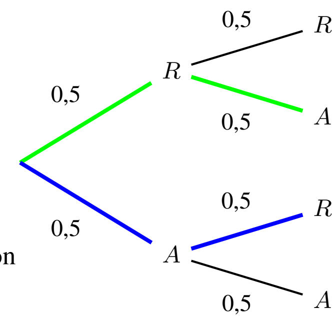
2. Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit une fille qui étudie l'allemand ?
« L'élève choisi est une fille qui étudie l'allemand » est l'événement $F \cap A$ et il y a 9 filles qui font de l'allemand donc :

$$\boxed{P(F \cap A) = \frac{9}{40} = 0,225}$$

3. L'élève choisi étudie le russe. Calculer la probabilité que cet élève soit un garçon.
On cherche $P_R(G)$;

$$\boxed{P_R(G) = \frac{P(R \cap G)}{P(R)} = \frac{0,3}{0,5} = \frac{3}{5} = 0,6}$$

4. On procède successivement deux fois au choix d'un élève de la classe. Le même élève peut être choisi deux fois. Calculer la probabilité de l'évènement : « Les deux élèves choisis n'étudient pas la même langue ».
On procède successivement deux fois au choix d'un élève, le même élève pouvant être choisi deux fois. On peut représenter les langues étudiées par les couples $(R ; R)$, $(R ; A)$, $(A ; R)$ et $(A ; A)$.



- L'événement « les deux élèves choisis n'étudient pas la même langue » correspond à :

$$(R ; A) \cup (A ; R)$$

- De ce fait :

$$P((R ; A)) = P(R) \times P(A) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$$
$$P((A ; R)) = P(A) \times P(R) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$$

- les deux événements $(R ; A)$ et $(A ; R)$ sont **incompatibles** donc la probabilité de leur réunion est égale à la somme de leurs probabilités.
  La probabilité cherchée est

$$\boxed{P((R ; A)) + P((A ; R)) = 0,25 + 0,25 = 0,5}$$

Exercice 2. Obligatoire : Suite et pourcentages 5 points

Enseignement Obligatoire

1. Soit n un entier naturel. Que vaut la somme $g_n + p_n$?

Le nombre g_n représente le pourcentage de personnes inscrites au club l'année n, et p_n le pourcentage de personnes non inscrites à ce club. De ce fait :

$$\boxed{g_n + p_n = 1}$$

2. 2. a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $g_{n+1} = 0,3g_n + 0,1p_n$.

Pour déterminer le pourcentage g_{n+1} des inscrits au club l'année $n+1$, il faut ajouter

- $30\,\%$ des personnes inscrites au club l'année n, soit $0,3g_n$;
- $10\,\%$ des personnes non inscrites l'année n, soit $0,1p_n$.

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ g_{n+1} = 0,3g_n + 0,1p_n}$$

2. b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $g_{n+1} = 0,2g_n + 0,1$.

On a vu que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ g_{n+1} = 0,3g_n + 0,1p_n$$

or $g_n + p_n = 1$ donc :

$$g_{n+1} = 0,3g_n + 0,1\,(1 - g_n) \iff g_{n+1} = 0,3g_n + 0,1 - 0,1g_n$$

soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ g_{n+1} = 0,2g_n + 0,1}$$

3. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = g_n - 0,125$. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= g_{n+1} - 0,125 \\ &= 0,2g_n + 0,1 - 0,125 \\ &= 0,2g_n - 0,025 \end{aligned}$$

or $u_n = g_n - 0,125$ donc $g_n = u_n + 0,125$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,2\,(u_n + 0,125) - 0,025 \\ &= 0,2u_n + 0,025 - 0,025 \\ u_{n+1} &= 0,2u_n \end{aligned}$$

de plus $u_0 = g_0 - 0,125 = 0,2 - 0,125 = 0,075$

$$\boxed{(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 0,075 \\ u_{n+1} & = 0,2u_n \end{cases}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

Donc la suite (u_n) **est géométrique de premier terme $u_0 = 0,075$ et de raison $q = 0,2$**.

4. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 0,075$ et de raison $q = 0,2$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = u_0 \times q^n$$

soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = 0,075 \times 0,2^n}$$

On peut en déduire que tous les termes de la suite (u_n) sont positifs.
Pour tout entier n,

$$u_{n+1} = 0,2u_n$$

or $u_n > 0$ et $0,2 < 1$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ 0,2u_n < u_n$$

et de ce fait

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_{n+1} < u_n$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

5. Montrer que pour tout entier n, $g_n = 0,125 + 0,075 \times 0,2^n$.

On a vu que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = 0,075 \times 0,2^n$$

or

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ g_n = u_n + 0,125$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ g_n = 0,125 + 0,075 \times 0,2^n}$$

Comment la proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique évolue-t-elle au cours des années ?

- La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,2$;
- or $0 < q = 0,2 < 1$ donc la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.
- De plus $g_n = 0,125 + u_n$ donc, d'après les théorèmes sur les limites de suites, la suite (g_n) a pour limite $0,125$.
- De plus, la suite (u_n) est décroissante donc la suite (g_n) l'est aussi.

On peut donc dire que **la proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique tend en décroissante vers $12,5\,\%$.**

Exercice 3. Vrai/Faux 4 points

1. $\boxed{\textbf{Affirmation 1 : Vraie}}$

La fonction G définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $G(x) = x\ln x - x + 10$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et :

$$G'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

Donc G est une primitive de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g\,(x) = \ln x$.

2. $\boxed{\textbf{Affirmation 2 : Fausse}}$

La fonction $f : x \longmapsto x^2 + 1$ a pour primitive $F : x \longmapsto \dfrac{x^3}{3} + x$.

Donc

$$\int_0^1 \left(x^2+1\right)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{3}+1\right) - 0 = \frac{4}{3} \neq \frac{1}{3}$$

3. $\boxed{\textbf{Affirmation 3 : Fausse}}$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;1]$.
On sait d'après le cours que l'espérance mathématique $E(X)$ d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;b]$ est $\dfrac{b+a}{2}$; sur l'intervalle $[0\,;1]$ on a :

$$E(X) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \neq 1$$

4. $\boxed{\textbf{Affirmation 4 : Vraie}}$

Dans une population, la proportion de garçons à la naissance est $p = 0,51$.
Pour une proportion p et un échantillon de taille n, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p + 1,96\frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Pour $n = 100$ et $p = 0,51$ l'intervalle est :

$$\left[0,51 - 1,96\frac{\sqrt{0,51\,(1-0,51)}}{\sqrt{100}}\,;0,51 + 1,96\frac{\sqrt{0,51\,(1-0,51)}}{\sqrt{100}}\right]$$

ce qui donne bien, en arrondissant à 0,001 près, l'intervalle

$$\boxed{[0,412\,;0,608]}$$

Exercice 4. Étude de fonction — 6 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [2 ; 5] par $f(x) = (3 - x)\,\mathrm{e}^{x} + 1$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [2 ; 5], $f'(x) = (2 - x)\mathrm{e}^{x}$ et $f''(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{x}$.

Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [2 ; 5], la fonction f est dérivable et :

$$\boxed{f'(x) = (-1)\,\mathrm{e}^{x} + (3 - x)\,\mathrm{e}^{x} = (2 - x)\,\mathrm{e}^{x}}$$

Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [2 ; 5], la fonction f' est dérivable et :

$$\boxed{f''(x) = (-1)\,\mathrm{e}^{x} + (2 - x)\,\mathrm{e}^{x} = (1 - x)\,\mathrm{e}^{x}}$$

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 5].

- Sur $[2\,;5]$: pour tout x, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2 - x$.
- Sur $]2\,;5]$, $2 - x < 0$ donc la **fonction f est strictement décroissante sur $[2\,;5]$**.

3. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle [2 ; 5].

- La fonction f est strictement décroissante sur $[2\,;5]$;
- De plus : $\begin{cases} f(2) = (3-2)\,\mathrm{e}^{2} + 1 = \mathrm{e}^{2} + 1 & \approx \quad 8,4 > 0 \\ f(5) = (3-5)\,\mathrm{e}^{5} + 1 = -2\,\mathrm{e}^{5} + 1 & \approx \quad -296 < 0 \end{cases}$
- Or $0 \in [f(2)\,;f(5)]$ donc, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[2\,;5]$. En effet :

> **Théorème 1** (Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires)
>
> Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

- Comme
$$\begin{cases} f(3) = (3-3)\,\mathrm{e}^{3} + 1 = 1 > 0 \\ f(4) = (3-4)\,\mathrm{e}^{4} + 1 = -\,\mathrm{e}^{4} + 1 \approx -53,6 < 0 \end{cases}$$
On peut dire que :
$$\boxed{3 < \alpha < 4}$$

4. 4. a. Montrer que T a pour équation $y = -\mathrm{e}^{3}x + 3\mathrm{e}^{3} + 1$.

Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.

La droite T a pour équation
$$y = f'(3)(x - 3) + f(3)$$
or $f'(x) = (2 - x)\,\mathrm{e}^{x}$ donc $f'(3) = (2 - 3)\,\mathrm{e}^{3} = -\,\mathrm{e}^{3}$ et $f(3) = 1$.

Donc l'équation de T est : $y = -\,\mathrm{e}^{3}(x - 3) + 1$ soit

$$\boxed{(T)\ :\ y = -\,\mathrm{e}^{3}x + 3\,\mathrm{e}^{3} + 1}$$

4. b. L'abscisse du point d'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses est la solution de l'équation
$$-\,\mathrm{e}^{3}x + 3\,\mathrm{e}^{3} + 1 = 0$$
or on a :
$$-\,\mathrm{e}^{3}x + 3\,\mathrm{e}^{3} + 1 = 0 \iff 3\,\mathrm{e}^{3} + 1 = \mathrm{e}^{3}x \iff \frac{3\,\mathrm{e}^{3} + 1}{\mathrm{e}^{3}} = x \iff x = 3 + \mathrm{e}^{-3}$$
Le point d'intersection de T avec l'axe des abscisses a pour coordonnées
$$\boxed{I\left(3 + \mathrm{e}^{-3}\,;0\right)}$$

4. c. Étudier le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle [2 ; 5] et en déduire la convexité ou la concavité de f sur cet intervalle.

Pour tout réel x on a

$$f''(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{x}$$

qui est du signe de $1-x$ car $\mathrm{e}^{x} > 0$ pour tout réel x. Or sur $[2\,;5]$, $1-x<0$ donc :

Sur $[2\,;5]$, $f''(x) < 0$ et f est concave.

4. d. En déduire que : $\alpha < 3 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}$.

- Sur $[2\,;5]$, la fonction f est concave ; donc sur cet intervalle, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes. En particulier $\mathscr{C}_f$ est située sous la tangente $(T)\ :\ y = g(x)$ en 3.
- Cela peut se traduire algébriquement par :

$$\forall x \in [2\,;5]\ ;\ f(x) \leq g(x)$$

- On a montré que $3 < \alpha < 4$ et donc $\alpha \in [2\,;5]$ ce qui implique que la tangente $(T)\ :\ y = g(x)$ en 3 est située au dessus strictement de la courbe $\mathscr{C}_f$ pour tous les points de $]3\ ;\ 4]$ et de ce fait :

$$f(\alpha) < g(\alpha)$$

et puisque par définition $f(\alpha) = 0$ et que $(T)\ :\ y = -\mathrm{e}^{3}x + 3\,\mathrm{e}^{3} + 1$ on a :

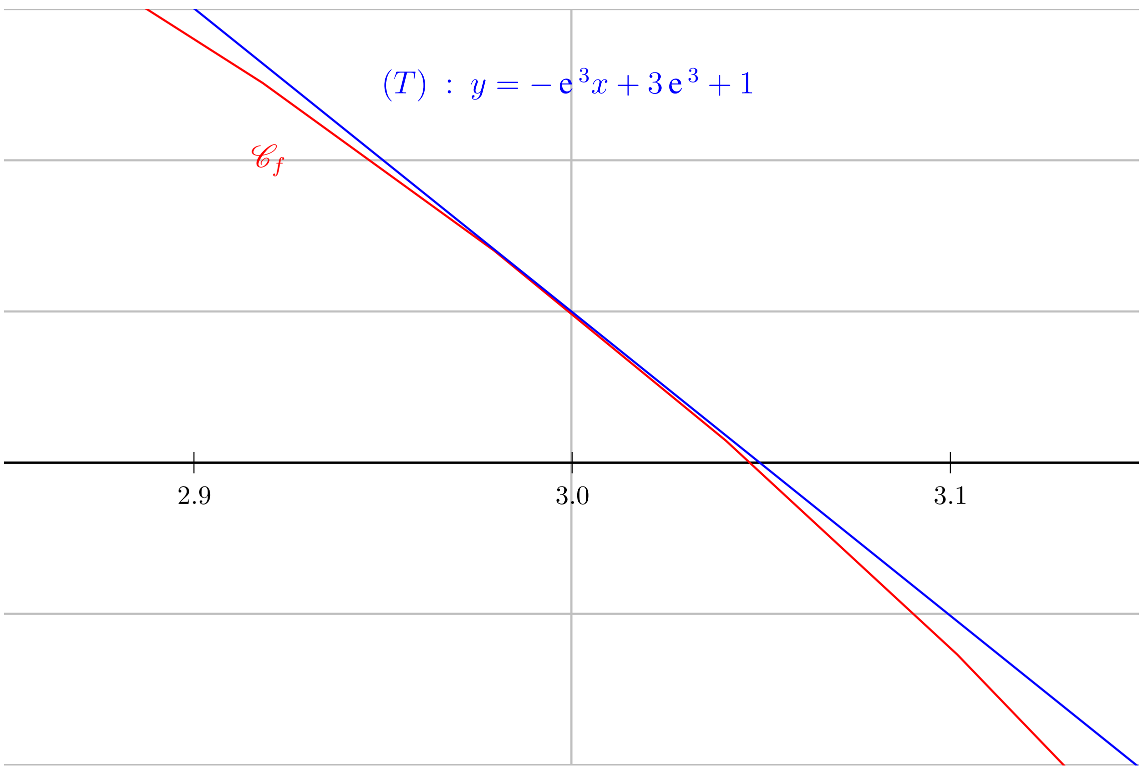
$$\begin{aligned} 0 &< -\mathrm{e}^{3}\alpha + 3\,\mathrm{e}^{3} + 1 \\ \mathrm{e}^{3}\alpha &< 3\,\mathrm{e}^{3} + 1 \\ \alpha &< \frac{3\,\mathrm{e}^{3}+1}{\mathrm{e}^{3}} \end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$\boxed{\alpha < 3 + \mathrm{e}^{-3}}$$

Et puisque $3 < \alpha < 4$ on a :

$$\boxed{3 < \alpha < 3 + \frac{1}{\mathrm{e}^{3}} < 3,05}$$



5. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a, b, m et r sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 3
	Affecter à b la valeur 3,05
Entrée :	Saisir r
Traitement :	TANT QUE $b - a > r$
	Affecter à m la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
	SI $f(m) > 0$
	ALORS Affecter à a la valeur m
	SINON Affecter à b la valeur m
	FIN SI
	FIN TANT QUE
Sortie :	Afficher a
	Afficher b

5. a. On fait fonctionner l'algorithme précédent avec $r = 0,01$:

	$b-a$	$b-a>r$	m	$f(m)$	$f(m)>0$	a	b
Initiali-sation						3	3,05
étape 1	0,05	oui	3,025	0,485	oui	3,025	3,05
étape 2	0,025	oui	3,037 5	0,218	oui	3,037 5	3,05
étape 3	0,012 5	oui	3,043 75	0,082	oui	3,043 75	3,05
étape 4	0,006 25	non					

5. b. Cet algorithme permet de donner un encadrement de la solution de l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie.
On peut donc dire que le nombre α appartient à l'intervalle $[3{,}043\,75\,;3{,}05]$.