

Correction Baccalauréat ES/L - Obligatoire Centres Étrangers - 12 Juin 2013

www.math93.com

Pour les candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité maths
et pour les candidats de la série L spécialité

Exercice 1.

6 points

Commun à tous les candidats

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville. Chaque année, 12,5% de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent. En 2012, la ville comptait 40 000 habitants. On note U_n le nombre d'habitants de la ville en l'année 2012 + n .

On a donc $U_0 = 40\,000$.

On admet que la suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_{n+1} = 0,875 \times U_n + 1\,200$.

On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel par $V_{n+1} = U_n - 9\,600$

Cet exercice est un QCM.

1. Réponse c.

La valeur de U_1 est :

$$U_1 = 0,875 \times U_0 + 1\,200$$

$$U_1 = 0,875 \times 40\,000 + 1\,200$$

$$\boxed{U_1 = 36\,200}$$

2. Réponse b.

Pour tout entier n on a :

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 9\,600$$

$$v_{n+1} = 0,875 \times U_n + 1\,200 - 9\,600$$

$$v_{n+1} = 0,875 \times \left(U_n - \frac{8\,400}{0,875} \right)$$

$$v_{n+1} = 0,875 \times (U_n - 9\,600)$$

Et donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 0,875 V_n$.

La suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,875$.

3. Réponse d.

– La suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,875$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = V_0 \times 0,875^n = 30\,400 \times 0,875^n;$$

– On sait que si $-1 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,875^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$.

– On a $U_n = V_n + 9\,600$ et donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 9\,600}$.

4. Réponse c.

La boucle Tant que s'exécute et calcule les termes successifs de la suite Tant qu'ils sont strictement supérieurs à 10 000.

Donc elle s'arrête pour le premier terme inférieure ou égal à 10 000. Au final l'algorithme affiche le rang de ce terme. La bonne réponse est la réponse c.

5. Réponse a.

En utilisant la fonction TABLE de la calculatrice, on trouve que le premier terme inférieur à 10 000 est u_{33} .

n	u_n
31	$\approx 10084,31$
32	$\approx 10023,77$
33	$\approx 9970,80$
34	$\approx 9924,45$

La bonne réponse est la réponse a.

Exercice 2.

5 points

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Un association fait une enquête sur des ventes de sacs de pommes.

On sait que :

- 15% des sacs sont vendus directement et le reste dans les supermarchés ;
- Parmi les sacs vendus directement, 80% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes ;
- Parmi les sacs vendus dans les supermarchés, 10% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.

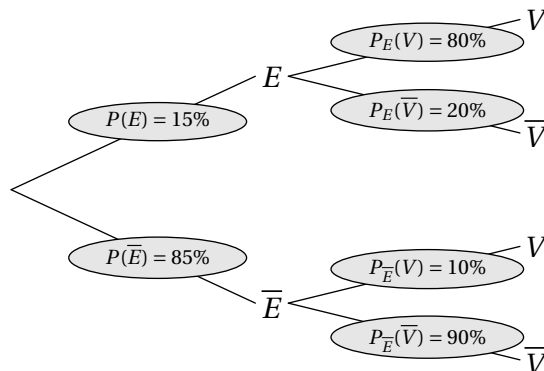
On désigne les évènements suivants :

- E : "les sacs de pommes sont vendus directement sur l'exploitation" ;
- V : "les sacs contiennent des pommes de variétés différentes".

1. Traduire les trois données de l'énoncé en termes de probabilités.

- 15% des sacs sont vendus directement et le reste dans les supermarchés, se traduit par : $P(E) = 15\%$ et $P(\bar{E}) = 85\%$;
- Parmi les sacs vendus directement, 80% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes, se traduit par $P_E(V) = 80\%$ et $P_E(\bar{V}) = 20\%$;
- Parmi les sacs vendus dans les supermarchés, 10% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes, se traduit par : $P_{\bar{E}}(V) = 10\%$ et $P_{\bar{E}}(\bar{V}) = 90\%$.

2. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.



3. Définir par une phrase l'évènement $E \cap V$ puis calculer sa probabilité.

L'évènement $E \cap V$ correspond aux sacs contenant des pommes de variétés différentes vendus directement.

$$P(E \cap V) = P_E(V) \times P(E) = 80\% \times 15\% = 0,12$$

Donc $P(E \cap V) = 12\%$.

4. **Montrer que la probabilité que le sac acheté contienne des pommes de variétés différentes est égale à 0,205.**

D'après le théorème des probabilités totales on a :

$$P(V) = P(V \cap E) + P(V \cap \bar{E})$$

$$P(V) = 12\% + P_{\bar{E}}(V) \times P(\bar{E})$$

$$P(V) = 12\% + 10\% \times 85\%$$

et donc $P(V) = 0,205 = 20,5\%$.

5. Le sac acheté contient des pommes d'une seule variété.

Calculer la probabilité qu'il ait été acheté directement sur l'exploitation, arrondir à 0,001 près.

$$\text{On cherche } P_{\bar{V}}(E) = \frac{P(\bar{E} \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} = \frac{P_{\bar{E}}(\bar{V}) \times P(\bar{E})}{P(\bar{V})}$$

Or d'après la question précédente, $P(V) = 0,205$ et donc $P(\bar{V}) = 1 - P(V) = 0,795$.

De ce fait on a :

$$P_{\bar{V}}(E) = \frac{0,15 \times 0,2}{0,795} \approx 0,038, \text{ soit } P_{\bar{V}}(E) \approx 3,8\%.$$

6. **Calculer le montant total des ventes qu'ils peuvent prévoir.**

Sur les 45 000 sacs il y aura 15% de sacs vendus directement soit : $15\% \times 45\,000 = 6\,750$.

Le reste des sacs, soit $45\,000 - 6\,750 = 38\,250$, sont vendus dans les supermarchés.

Le montant des ventes prévues sera alors de :

$$6\,750 \times 0,80 \text{ euros} + 38\,250 \times 3,40 \text{ euros} = 135\,450 \text{ euros}.$$

Exercice 3.

5 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $[2 ; 8]$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$$

1. **Montrer que sur $[2 ; 8]$ on a $f'(x) = \frac{-10x+32}{x^3}$.**

La fonction f est du type $\frac{u}{v}$, et donc dérivable comme quotient de fonctions qui le sont sur $[2 ; 8]$ puisque v est non nulle.

$$\text{La dérivée est donc } \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}, \text{ avec } \begin{cases} u(x) &= -x^2 + 10x - 16 \\ u'(x) &= -2x + 10 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v(x) &= x^2 \\ v'(x) &= 2x \end{cases}$$

On obtient donc $\forall x \in [2 ; 8]$,

$$f'(x) = \frac{(-2x + 10) \times x^2 - (-x^2 + 10x - 16) \times 2x}{(x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^3 + 10x^2 + 2x^3 - 20x^2 + 32x}{x^4}$$

donc

$$f'(x) = \frac{-10x^2 + 32x}{x^4} = \frac{x \times (-10x + 32)}{x \times x^3} = \frac{-10x + 32}{x^3}$$

$$\text{d'où } \forall x \in [2 ; 8], \boxed{f'(x) = \frac{-10x + 32}{x^3}}.$$

2. **a. Étudions le signe de $f'(x)$.**

Sur $[2 ; 8]$, $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-10x + 32$, c'est à dire positif sur $[2 ; 3,2]$ et négatif sur $[3,22 ; 8]$.

x	2	3,2	8
$f'(x)$	+	0	-

b. Établir le tableau de variations de f .

D'où le tableau de variation de la fonction f .

x	2	3,2	8
$f'(x)$	+	0	-
f	0	\nearrow $\frac{9}{16} = 0,5625$	\searrow 0

3. On appelle f'' la dérivée seconde de f sur $[2; 8]$. On admet que sur l'intervalle $[2; 8]$, on a :

$$f''(x) = \frac{20x - 96}{x^4}$$

a. Montrer que f est convexe sur $[4,8; 8]$.

$f''(x) = \frac{20x - 96}{x^4}$, or $x^4 > 0$ sur $[2; 8]$ donc $f''(x)$ est du signe de $20x - 96$ (qui s'annule pour $\frac{96}{20} = 4,8$) donc on peut dresser le tableau de variation de la fonction f' sur $[2; 8]$.

x	2	4,8	8
f''	-	0	+
f'		\searrow	\nearrow

La fonction f' est croissante sur $[4,8; 8]$ donc la fonction f est convexe sur $[4,8; 8]$.

b. Montrer que le point de la courbe \mathcal{C} d'abscisse 4,8 est un point d'inflexion.

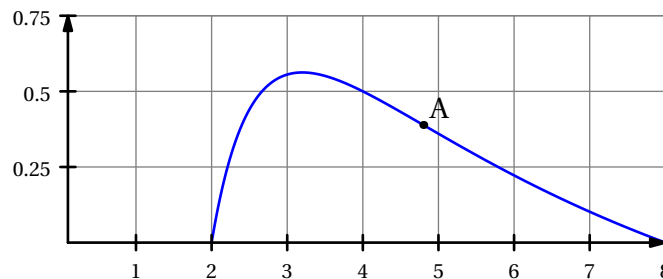
La fonction f' est décroissante sur $[2; 4,8]$ puis croissante sur $[4,8; 8]$ donc :

- la fonction f est concave sur $[2; 4,8]$;
- puis convexe sur $[4,8; 8]$.

Cela montre que le point de (\mathcal{C}) d'abscisse 4,8 est un point d'inflexion.

Complément

Même si ce n'est pas demandé, on peut tracer la courbe (\mathcal{C}) à l'aide de la calculatrice.



4. On considère la fonction F définie sur $[2; 8]$ par :

$$F(x) = -x + 10 \ln x + \frac{16}{x}$$

a. Montrer que F est une primitive de f sur $[2; 8]$.

Sur $[2; 8]$, la fonction F est dérivable et

$$F'(x) = -1 + 10 \times \frac{1}{x} + 16 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$F'(x) = -1 + \frac{10}{x} - \frac{16}{x^2} = \frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2} \text{ donc}$$

$F'(x) = f(x)$ de ce fait la fonction F est une primitive de f sur $[2; 8]$.

b. Calculer $I = \int_2^8 f(x) dx$.

$$I = \int_2^8 f(x) dx = [F(x)]_2^8 = F(8) - F(2) = -8 + 10 \ln 8 + 2 - (-2 + 10 \ln 2 + 8)$$

$$I = -8 + 10 \ln 8 + 2 + 2 - 10 \ln 2 - 8$$

$$I = -12 + 10 \ln 8 - 10 \ln 2 \text{ donc}$$

$$I = -12 + 10 \ln 4 \approx 1,86.$$

Exercice 4.

4 points

Commun à tous les candidats

1. Paul se connecte sur le site. La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[20; 120]$.

a. **Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes.**

On cherche donc $P(D < 60)$ avec D qui suit une loi uniforme sur $[20; 120]$.

$$P(D < 60) = P(20 < D < 60) = \frac{60 - 20}{120 - 20} = 0,4$$

Donc la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes est $\boxed{0,4}$.

b. **Calculer l'espérance mathématique de D . Interpréter ce résultat.**

$$E(D) = \frac{120 + 20}{2} = 70 \text{ donc en moyenne les quatre joueurs sont réunis au bout de 70 secondes.}$$

2. L'équipe est maintenant réunie et la partie peut commencer. La durée J (en minutes) d'une partie est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(120; 400)$.

a. **Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire J .**

J est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(120; 400)$ soit $\mathcal{N}(m = 120; \sigma^2 = 400)$.

J a pour $\boxed{\text{espérance } m = 120}$ et son écart-type est donc $\boxed{\sigma = \sqrt{400} = 20}$.

b. **Montrer l'équivalence : $90 < J < 180 \iff -1,5 < \frac{J - 120}{20} < 3$**

$$90 < J < 180 \iff 90 - 120 < J - 120 < 180 - 120, \text{ donc}$$

$$90 < J < 180 \iff \frac{-30}{20} < \frac{J - 120}{20} < \frac{60}{20}$$

$$90 < J < 180 \iff -1,5 < \frac{J - 120}{20} < 3$$

$$\text{donc } \boxed{90 < J < 180 \iff -1,5 < \frac{J - 120}{20} < 3}.$$

c. On définit la variable aléatoire X par $X = \frac{J - 120}{20}$.

Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X .

X suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, soit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

d. **Déterminer la probabilité que la partie dure entre 90 et 180 minutes, à 0,001 près.**

$$P(90 < J < 180) = P\left(-1,5 < \frac{J - 120}{20} < 3\right), \text{ d'après la question 2b.}$$

$$P(90 < J < 180) = P(-1,5 < X < 3) \text{ où } X \text{ suit la loi } \mathcal{N}(0; 1)$$

$$\text{La calculatrice donne alors : } \boxed{P(90 < J < 180) \approx 0,932}.$$