CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

À rendre avec la copie : 1 feuille de papier millimétré.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES.

LES CANDIDATS VEILLERONT À JUSTIFIER LEURS DÉMONSTRATIONS EXCLUSIVEMENT À L'AIDE DES OUTILS DU PROGRAMME DE LA FILIÈRE.

EXERCICE 1

Le plan usuel est muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit Γ la courbe paramétrée, pour $t \in \mathbb{R}$, par : $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 2\,t \end{cases}$

On appelle *podaire de* Γ *par rapport à un point* P *du plan*, l'ensemble des projetés orthogonaux de P sur les tangentes à Γ.

1. Donner une équation cartésienne de Γ.

2. Reconnaître Γ et en donner les éléments caractéristiques.

3. Soit M un point de Γ de paramètre t.
Déterminer une équation de la tangente à Γ en M.

4. Soit F le point de coordonnées $(1, 0)$.
Vérifier que la podaire de Γ par rapport à F est une droite que l'on reconnaitra.

5. On cherche dans cette question à déterminer la podaire γ de Γ par rapport à O.

5.1 Déterminer des équations paramétriques de γ.

5.2 Représenter graphiquement, sur la feuille de papier millimétré prévue à cet effet, les courbes γ et Γ dans un même repère. (On étudiera soigneusement les éventuels points stationnaires et branches infinies de la courbe γ).

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle $]0, +\infty[$.

PARTIE A

1. Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1+(nx)^2}$ converge.

On définit alors la fonction f de I dans $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(nx)^2}$.

2. Déterminer le sens de variation de f.

3. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

4. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

5. **5.1** Vérifier que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I,\ \frac{1}{1+(p+1)^2\,x^2} \leqslant \int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2\,x^2} \leqslant \frac{1}{1+p^2\,x^2}$$

5.2 En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

6. Donner l'allure de la courbe représentative de f.

Partie B

1. Justifier pour tout $x \in I$, l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}\,\mathrm{d}t$.

2. On définit alors la fonction φ de I dans $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que φ est continue sur I.

3. Le but de cette question est de prouver $\varphi = f$.

3.1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I$.

3.1a Justifier l'existence de l'intégrale : $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kxt}\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

3.1b Vérifier que l'on a : $J_k = \dfrac{1}{1+k^2x^2}$.

3.2 Conclure.

Exercice 3

Soit E un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $(.|.)$ et la norme associée notée $||.||$

On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ tels que la propriété (P) suivante soit vérifiée :

$$(P) \qquad \forall x \in E,\ ||x||^2 = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)^2$$

On désigne par F le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathscr{B}$.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit la matrice symétrique $A = ((e_i|e_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. **1.1** Soit $x \in F^\perp$. Calculer $||x||^2$.

1.2 En déduire que E est de dimension finie.

2. Dans cette question, et uniquement celle-ci, on suppose : $\forall i \in \{1, 2, ..., n\},\ ||e_i|| \geqslant 1$

Montrer qu'alors $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E.

3. Dans cette question, et uniquement celle-ci, on suppose que $\mathscr{B}$ est une famille libre de E.

3.1 Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.

3.2 Énoncer une identité de polarisation liant produit scalaire et norme associée.

3.3 En utilisant la propriété (P), démontrer : $\forall (x,y) \in E^2,\ (x|y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x|e_i)(y|e_i)$

3.4 En déduire que l'on a $A^2 = A$.

3.5 Soit a l'endormorphisme de E dont A est la matrice dans la base $\mathscr{B}$. Déterminer le noyau de a.

3.6 En déduire que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E.

$\boxed{\text{EXERCICE 4}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans tout l'exercice on identifie un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et sa matrice colonne associée d'une part et un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ avec sa matrice canoniquement associée, d'autre part.

I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

Soit $|| \ ||$ une norme sur $\mathbb{C}^n$.

On considère $\mathcal{N}$ la norme subordonnée à $|| \ ||$, c'est-à-dire telle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\mathcal{N}(A) = \sup_{||X|| \leqslant 1} ||A\,X||$$

On rappelle que l'on a : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \quad \mathcal{N}(A\,B) \leqslant \mathcal{N}(A)\,\mathcal{N}(B)$

1. Démontrer que l'on a : $\forall X \in \mathbb{C}^n$, $||A\,X|| \leqslant \mathcal{N}(A)\,||X||$.

2. Prouver qu'il existe $X_0 \in \mathbb{C}^n, X_0 \neq 0$ tel que l'on a : $\mathcal{N}(A) = \dfrac{||A\,X_0||}{||X_0||}$.

3. Vérifier l'égalité $\mathcal{N}(I_n) = 1$

On rappelle que la norme $\mathcal{N}_\infty$ est définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\mathcal{N}_\infty(A) = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |\, a_{ij} \,|$$

4. Justifier, sans les calculer, l'existence de deux réels strictement positifs α et β tels que l'on a :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \alpha\,\mathcal{N}_\infty(A) \leqslant \mathcal{N}(A) \leqslant \beta\,\mathcal{N}_\infty(A)$$

Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe du groupe multiplicatif $GL_n(\mathbb{C})$ qui possède la propriété suivante :

$$\forall A \in \mathcal{G}, \quad \mathcal{N}(A - I_n) \leqslant 1$$

ce que l'on peut traduire par : $\mathcal{G}$ est inclus dans la boule fermée de centre I_n et de rayon 1 pour la norme $\mathcal{N}$.

5. Montrer que l'ensemble $\mathcal{G}$ est borné pour la norme $\mathcal{N}$.

6. Soient $A \in \mathcal{G}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

6.1 Justifier que $A^k \in \mathcal{G}$.

6.2 Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.
Justifier que λ est non nul et déterminer $A^k X$.

6.3 Montrer que l'on a : $||(A^k - I_n)\,X|| \leqslant ||X||$.
En déduire les inégalités : $|\lambda^k - 1| \leqslant 1$ puis $\big||\lambda|^k - 1\big| \leqslant 1$

6.4 Démontrer que $|\lambda| = 1$.
(On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde et distinguer les cas $|\lambda| > 1$ et $|\lambda| < 1$).
On pose dans la suite de cette question $\lambda = e^{i\,\theta}$ où $\theta \in [-\pi, \pi]$.

6.5 Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $|\cos(k\theta) - 1| \leqslant 1$, puis $\cos(k\theta) \geqslant 0$.

6.6 Montrer alors successivement que l'on a $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ puis $\forall q \in \mathbb{N}$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2^q}, \frac{\pi}{2^q}\right]$.

6.7 En déduire : $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$

7. Dans toute cette question, on étudie le cas $n = 2$.

Soit A une matrice non diagonalisable de $\mathcal{G}$.

7.1 Montrer que A est semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où a est un complexe non nul.

7.2 Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Calculer T^m puis $\mathcal{N}_\infty(T^m)$.

7.3 Démonter $\lim\limits_{m \to +\infty} \mathcal{N}(T^m) = +\infty$, puis $\lim\limits_{m \to +\infty} \mathcal{N}(A^m) = +\infty$.

7.4 En déduire que toute matrice de $\mathcal{G}$ est diagonalisable.

7.5 Décrire alors l'ensemble $\mathcal{G}$.

FIN DE L'ÉPREUVE