e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Exercice n°1 :

Cet exercice a pour but d'étudier la décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique réelle définie positive.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre n.
- $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, I_n désigne la matrice identité.
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthogonales.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques réelles.
- Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(f_1,...,f_k)$ une famille de vecteurs de E, Vect$(f_1,...,f_k)$ désigne le sous espace vectoriel engendré par la famille $(f_1,...,f_k)$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Sp(A) désigne l'ensemble des valeurs propres réelles de A et ${}^tA$ la transposée de A.
- $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.

  Par définition, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}(A) \subset]0,+\infty[$.
- $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles **triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs.**
- $\mathbb{R}^n$ sera identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ensemble des matrices réelles avec n lignes et 1 colonne.
  Lorsque $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, $\| . \|$ désigne la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique : $\|X\|^2 = {}^tX\,X$.
- Les candidats seront amenés à utiliser le théorème suivant :
  Théorème d'orthonormalisation de Schmidt : Si (E,(. | .)) est un espace préhilbertien réel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1,...,f_p)$ une famille libre de E, alors il existe une unique famille orthonormale $(g_1,...,g_p)$ telle que pour tout $k \in \{1,...,p\}$:

  $$\mathrm{Vect}(f_1,...,f_k)=\mathrm{Vect}(g_1,...,g_k) \text{ et } (f_k \mid g_k) > 0.$$

  La famille $(g_1,...,g_p)$ s'appelle alors l'orthonormalisée de Schmidt de $(f_1,...,f_p)$.

I. Etude d'un exemple numérique :

On considère, dans cette question I uniquement, la matrice $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) Enoncer le théorème qui permet de justifier qu'il existe une matrice $O \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^tOSO = D$ où D est une matrice diagonale.

2) Déterminer O et D telles que $\underline{\det(O)=1}$ et $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ où $\underline{\alpha < \beta < \gamma}$ puis justifier que $S \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$.

3) Démontrer qu'il existe une unique matrice $T \in \mathcal{T}_3^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tT\,T$.
   On explicitera la matrice T.

II. Résultats préliminaires :

1) On considère $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que :

$$\varphi_S : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (X,Y) \mapsto {}^tX\, S\, Y \end{cases} \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}^n.$$

2) Proposition : $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

   Démontrer cette proposition pour $n=2$. Dans la suite, on admettra le résultat pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III. Une caractérisation des matrices symétriques réelles définies positives :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $B = {}^tA\, A$.

1) Montrer que $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre associé à λ, alors $\|Ax\|^2 = \lambda \|x\|^2$ en déduire que $\lambda \in [0,+\infty[$.
3) En déduire que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

IV. Décomposition de Cholesky :

Le but de cette question est de montrer le théorème suivant :
Théorème : $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe une unique matrice $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tT\, T$. Cette décomposition s'appelle décomposition de Cholesky de S.

On considère $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que s'il existe $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tT\, T$ alors $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2) On suppose qu'il existe T_1, T_2 deux matrices de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que ${}^tT_1\, T_1 = {}^tT_2\, T_2$.

   a) Montrer que $\Delta = T_1 (T_2)^{-1}$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs. (utiliser II.2))
   b) En déduire, en utilisant ${}^tT_1\, T_1 = {}^tT_2\, T_2$, que $\Delta^2 = I_n$.
   c) En déduire que $T_1 = T_2$.

3) On suppose $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et on considère φ_S le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ défini en II.1). Soit b=$(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et b'=$(v_1,\dots,v_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de b pour le produit scalaire φ_S.
   On note T la matrice de passage de la base b' à la base b.

   a) Montrer $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   b) Montrer que $S = {}^tT\, T$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice n°2 :

Dans cet exercice, g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-t}}{t} & \text{si } t\neq 0\\ 1 & \text{si } t=0\end{cases}$.

1) Enoncer le théorème de dérivation pour les fonctions définies par :
$F: x\in I\mapsto \int_J f(x,t)dt$ où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

2) Etude de g :

a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que g a un développement limité en 0 à l'ordre 1.
En déduire que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser $g'(0)$.

c) Déterminer le signe pour $t\in\mathbb{R}$ de $(1+t)e^{-t}-1$.

d) Dresser le tableau de variations de g et tracer le graphe de g.

e) i) Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction g, préciser le rayon de convergence de la série entière.
ii) Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et préciser pour tout k$\in\mathbb{N}$, $g^{(k)}(0)$ (énoncer le (ou les) théorème(s) utilisé(s)).

3) On considère la fonction h définie par $h(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{t}\sin(\mathrm{t})\,dt$.

a) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du$ converge (on pourra utiliser une intégration par parties).

On notera alors α la valeur de cette intégrale et on pourra écrire
$$h(x)=\alpha-\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt.$$

b) En déduire que h est définie sur [0,+∞[. Que vaut $h(0)$?

c) Montrer que h est dérivable sur tout intervalle de la forme [a,+∞[(a>0).
En déduire que pour tout $x>0$, $h'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

d) Montrer que pour tout $x>0$: $h(x)=\int_0^{+\infty}g(u)\sin\left(\frac{u}{x}\right)du$.

e) En déduire que pour tout $x>0$: $h(x)=x+x\int_0^{+\infty}g'(u)\cos\left(\frac{u}{x}\right)du$.

f) En déduire que pour tout $x>0$: $|h(x)|\leq 2x$.

g) Montrer que h est continue sur [0,+∞[et que pour tout $x\geq 0$: $h(x)=\text{Arctan}(x)$.

h) En déduire que $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Exercice n°3 :

On se place dans le plan affine euclidien et on considère :

- F un point du plan.
- $\mathcal{D}$ une droite du plan ne contenant pas F.
- Δ la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par F et A le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et Δ.
- p la distance AF.
- S le milieu du segment $[AF]$.

Le but de cet exercice est l'étude de la parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$.
Par définition $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points équidistants de F et de $\mathcal{D}$:
$M \in \mathcal{P}$ si, et seulement si, $MF = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

On considère le repère orthonormé direct $\mathfrak{R}=\left(S,\vec{i},\vec{j}\right)$ où $\vec{i}=\frac{1}{p}\overrightarrow{AF}$.

1)

a) Donner les coordonnées dans $\mathfrak{R}$ de A,S,F et une équation de la droite $\mathcal{D}$.

b) On considère M de coordonnées $\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ dans $\mathfrak{R}$, montrer que $M \in \mathcal{P}$ ssi $y^2 = 2px$.

2) $\mathcal{P}$ est alors paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{2p} \\ y(t) = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. On considère $t_0 \in \mathbb{R}$ et M_0 le point de $\mathcal{P}$ de paramètre t_0.

a) Donner une équation de $\mathcal{T}_0$ la tangente à $\mathcal{P}$ en M_0 et de $\mathcal{N}_0$ la normale à $\mathcal{P}$ en M_0.

b) On note H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathcal{D}$.

i) Donner la nature du triangle FH_0M_0.

ii) Vérifier que $\mathcal{T}_0$ est la médiatrice du segment $[FH_0]$.

3)

a) Déterminer en M_0 le repère de Frenet de $\mathcal{P}$ noté $\left(M_0,\overrightarrow{T_0},\overrightarrow{N_0}\right)$.

b) Déterminer en M_0 le rayon de courbure de $\mathcal{P}$ noté R_0.

c) On appelle centre de courbure en M_0 à $\mathcal{P}$ noté Ω_0 le point défini par $\overrightarrow{M_0\Omega_0} = R_0\overrightarrow{N_0}$, déterminer dans $\mathfrak{R}$ les coordonnées de Ω_0.

4) On considère la courbe paramétrée (C) définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} x(t) = 2 + \dfrac{3}{4}t^2 \\ y(t) = -\dfrac{t^3}{4} \end{cases}$.

a) Etudier la symétrie de (C).

b) Dresser le tableau de variations des fonctions x et y.

c) Etudier avec précision le point stationnaire de (C).

d) Etudier la branche infinie de (C) lorsque t tend vers $+\infty$.

e) Tracer la courbe (C) et la courbe $(\mathcal{P})$ (pour p=2) sur une même figure.

****

IN CHOISY – 13 1050 – D'après documents fournis