

1. Définition de l'exposant de Hölder ponctuel

1a

Soit $s \in [0, 1]$. L'ensemble $\Gamma^s(x_0)$ est inclus dans \mathcal{C} et contient la fonction nulle sur $[0, 1]$. Soient $(f, g) \in \Gamma^s(x_0)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f + \lambda g$ est continue sur $[0, 1]$ comme combinaison linéaire de fonctions continues sur $[0, 1]$. De plus, grâce à l'inégalité triangulaire, on a

$$\forall x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}, \quad \frac{|(f + \lambda g)(x) - (f + \lambda g)(x_0)|}{|x - x_0|^s} \leq \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^s} + |\lambda| \frac{|g(x) - g(x_0)|}{|x - x_0|^s}$$

donc

$$\forall x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}, \quad \frac{|(f + \lambda g)(x) - (f + \lambda g)(x_0)|}{|x - x_0|^s} \leq \sup_{t \in [0, 1] \setminus \{x_0\}} \frac{|f(t) - f(x_0)|}{|t - x_0|^s} + |\lambda| \sup_{t \in [0, 1] \setminus \{x_0\}} \frac{|g(t) - g(x_0)|}{|t - x_0|^s}$$

Par conséquent, l'ensemble $\left\{ \frac{|(f + \lambda g)(x) - (f + \lambda g)(x_0)|}{|x - x_0|^s}, x \in [0, 1] \setminus \{x_0\} \right\}$ est majoré et non vide. Sa borne supérieure est donc finie i.e. $\lambda f + g \in \Gamma^s(x_0)$. Ainsi, $\Gamma^s(x_0)$ est un sous-espace vectoriel de \mathcal{C} .

Soient $(s_1, s_2) \in [0, 1]^2$ tel que $s_1 \leq s_2$ et $f \in \Gamma^{s_2}(x_0)$ alors

$$\forall x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}, \quad \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^{s_1}} = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^{s_2}} |x - x_0|^{s_2 - s_1}$$

Comme $s_2 - s_1 \geq 0$, la fonction $x \mapsto |x - x_0|^{s_2 - s_1}$ est majorée par 1 sur le segment $[0, 1]$. Par suite,

$$\forall x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}, \quad \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^{s_1}} \leq \sup_{t \in [0, 1] \setminus \{x_0\}} \frac{|f(t) - f(x_0)|}{|t - x_0|^{s_2}}$$

Par conséquent, l'ensemble $\left\{ \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^{s_1}}, x \in [0, 1] \setminus \{x_0\} \right\}$ est majoré et non vide. Sa borne supérieure est donc finie i.e. $f \in \Gamma^{s_1}(x_0)$, ce qui montre l'inclusion $\Gamma^{s_2}(x_0) \subset \Gamma^{s_1}(x_0)$.

Par définition, $\Gamma^0(x_0) \subset \mathcal{C}$. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{C}$ alors la fonction $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ est continue sur le segment $[0, 1]$ donc bornée sur le segment $[0, 1]$. Par suite, l'ensemble $\left\{ \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^0}, x \in [0, 1] \setminus \{x_0\} \right\}$ est majoré et non vide, ce qui montre que $f \in \Gamma^0(x_0)$. D'où, $\Gamma^0(x_0) = \mathcal{C}$.

1b

Soit $f \in \mathcal{C}$ dérivable en x_0 alors

$$\forall x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}, \quad \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^s} = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} |x - x_0|^{1-s}$$

Comme $1 - s \geq 0$, la fonction $x \mapsto |x - x_0|^{1-s}$ est majorée par 1 sur le segment $[0, 1]$. La fonction f étant dérivable en x_0 la fonction taux d'accroissement en x_0 définie par

$$\begin{cases} \tau_{x_0} : [0, 1] \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{cases}$$

est continue sur $[0, 1] \setminus \{x_0\}$ et prolongeable par continuité en x_0 . Elle est donc bornée sur $[0, 1]$. Par suite,

$$\forall x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}, \quad \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^s} \leq \sup_{t \in [0, 1] \setminus \{x_0\}} \frac{|f(t) - f(x_0)|}{|t - x_0|}$$

Par conséquent, l'ensemble $\left\{ \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^s}, x \in [0, 1] \setminus \{x_0\} \right\}$ est majoré et non vide. Sa borne supérieure est donc finie ce qui montre $f \in \Gamma^s(x_0)$.

1.c

Soit $x_0 \in]0, 1[$. La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x - x_0|$ appartient à \mathcal{C} et n'est pas dérivable en x_0 . De plus, soit $s \in [0, 1[$ alors

$$\forall x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}, \quad \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^s} = |x - x_0|^{1-s} \leq 1$$

donc $f \in \Gamma^s(x_0)$. Il existe donc des fonctions continues sur $[0, 1]$ non dérivables en x_0 mais appartenant à $\Gamma^s(x_0)$ pour tout $s \in [0, 1[$.

2

Soit $x \in [0, 1] \setminus \{1/2\}$ et $s \in [0, 1]$, on a

$$\frac{|p(x) - p(1/2)|}{|x - 1/2|^s} = \sqrt{2(2x+1)} |x - 1/2|^{1/2-s}$$

Pour tout $s \in [0, 1/2]$, la fonction $x \mapsto \sqrt{2(2x+1)} |x - 1/2|^{1/2-s}$ est continue sur le segment $[0, 1]$ donc bornée sur $[0, 1]$. Par conséquent, pour tout $s \in [0, 1/2]$, $f \in \Gamma^s(x_0)$. De plus, pour tout $s \in]1/2, 1[$, $\lim_{x \rightarrow 1/2^+} \sqrt{2(2x+1)} |x - 1/2|^{1/2-s} = +\infty$.

L'ensemble $\left\{ \frac{|p(x) - p(1/2)|}{|x - 1/2|^s}, x \in [0, 1] \setminus \{1/2\} \right\}$ n'est donc pas majoré i.e. $p \notin \Gamma^s(1/2)$. Finalement, $\alpha_p(1/2) = 1/2$.

3a

Soit $(h, h') \in [0, 1]^2$ tel que $h \leq h'$ alors

$$\{|f(x) - f(y)|, (x, y) \in [0, 1]^2 : |x - y| \leq h\} \subset \{|f(x) - f(y)|, (x, y) \in [0, 1]^2 : |x - y| \leq h'\}$$

donc $\omega_f(h) \leq \omega_f(h')$ ce qui prouve la croissance de ω_f sur $[0, 1]$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur le segment $[0, 1]$, f est uniformément continue sur $[0, 1]$ d'après le théorème de Heine. Il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Ainsi, pour tout réel $h \in [0, 1]$ tel que $|h| \leq \eta$, on a $0 \leq \omega_f(h) \leq \varepsilon$. Comme $\omega_f(0) = 0$, on a donc prouvé que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall h \in [0, 1], |h| \leq \eta \Rightarrow 0 \leq \omega_f(h) - \omega_f(0) \leq \varepsilon$$

ce qui prouve la continuité de ω_f en 0.

3.b

Soit $(h, h') \in [0, 1]^2$ tel que $h \leq h'$ et $(x, y) \in [0, 1]^2$ tel que $|x - y| \leq h'$.

Si $|x - y| \leq h$ alors

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(h) \leq \omega_f(h') \leq \omega_f(h') + \omega_f(h' - h)$$

Si $|x - y| > h$ alors, par symétrie, on peut supposer que $x < y$ et on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x+h)| + |f(x+h) - f(y)|$$

Or $|x+h-y| = y - (x+h) = |x-y| - h \leq h' - h$ donc $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(h) + \omega_f(h' - h)$.

D'où,

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| \leq h' \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \omega_f(h) + \omega_f(h' - h)$$

ce qui prouve que

$$\omega_f(h') \leq \omega_f(h) + \omega_f(h' - h)$$

3.c

Soit $(h, h') \in [0, 1]^2$. Si $h \leq h'$ alors la croissance de ω_f et la question précédente donnent

$$\omega_f(h) \leq \omega_f(h') \leq \omega_f(h) + \omega_f(h' - h)$$

donc

$$|\omega_f(h') - \omega_f(h)| \leq \omega_f(|h - h'|)$$

Par symétrie des rôles joués par h et h' , on en déduit que

$$\forall (h, h') \in [0, 1]^2, |\omega_f(h') - \omega_f(h)| \leq \omega_f(|h - h'|)$$

Soit $h_0 \in [0, 1]$ alors

$$\forall h \in [0, 1], |\omega_f(h) - \omega_f(h_0)| \leq \omega_f(|h - h_0|)$$

Comme ω_f est continue en 0 et vaut 0 en 0, on en déduit que ω_f est continue en h_0 puis que ω_f est continue sur $[0, 1]$.

4.a

Par définition, $f \in \mathcal{C}$. Soit $s \in [0, 1[$ et $x_0 \in [0, 1]$ alors

$$\forall x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}, \quad \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^s} \leq \frac{\omega_f(|x - x_0|)}{|x - x_0|^s}$$

Donc si la fonction $h \mapsto \frac{\omega_f(h)}{h^s}$ est bornée sur $[0, 1]$ alors l'ensemble $\left\{ \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^s}, x \in [0, 1] \setminus \{x_0\} \right\}$ est majoré et non vide, ce qui implique que $f \in \Gamma^s(x_0)$.

4.b

Soit $x_0 \in]0, 1]$ alors q est dérivable en x_0 . D'après la question 1.b, on en déduit que $q \in \Gamma^s(x_0)$ pour tout $s \in [0, 1[$ puis que $\alpha_q(x_0) = 1$.

Soit $s \in [0, 1[$

$$\forall x \in [0, 1] \setminus \{0\}, \quad \frac{|q(x) - q(0)|}{|x|^s} \leq |x|^{1-s} \leq 1$$

donc $q \in \Gamma^s(0)$ puis $\alpha_q(0) = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\begin{aligned} q\left(\frac{1}{2n}\right) - q\left(\frac{1}{2n+1}\right) &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = \frac{4n+1}{2n(2n+1)} \\ \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} &= \frac{-1}{2n(2n+1)} \end{aligned}$$

Donc $w_q\left(\frac{1}{2n(2n+1)}\right) \geq \frac{4n+1}{2n(2n+1)}$ puis

$$\frac{w_q\left(\frac{1}{2n(2n+1)}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2n(2n+1)}}} \geq \frac{\frac{4n+1}{2n(2n+1)}}{\sqrt{\frac{1}{2n(2n+1)}}} = \frac{4n+1}{\sqrt{2n(2n+1)}}$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n+1}{\sqrt{2n(2n+1)}} \neq 0$$

on en déduit que la fonction $h \mapsto \frac{w_q(h)}{\sqrt{h}}$ ne tend pas vers zéro en zéro. La réciproque de la question précédente est donc fausse.

2. Le système de Schauder**5.a**

Soit $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathcal{T}_{j+1}$. Pour tout entier k' , on a

$$\begin{aligned} [k2^{-j-1}, (k+1)2^{-j-1}] \subset [k'2^{-j}, (k'+1)2^{-j}] &\iff \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right] \subset [k', k'+1] \\ &\iff k' \in \left[\frac{k-1}{2}, \frac{k}{2}\right] \end{aligned}$$

Par conséquent, l'unique entier k' tel que $[k2^{-j-1}, (k+1)2^{-j-1}] \subset [k'2^{-j}, (k'+1)2^{-j}]$ est $k/2$ si k est pair et $(k-1)/2$ si k est impair. Dans tous les cas, il existe un unique entier k' tel que $[k2^{-j-1}, (k+1)2^{-j-1}] \subset [k'2^{-j}, (k'+1)2^{-j}]$. Il appartient à \mathcal{T}_j et est donné par $k' = E(k/2)$.

5.b

Soit $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathcal{T}_j$ et $\ell \in \mathcal{T}_{j+1}$. D'après la question précédente, $\ell 2^{-j-1} \in [E(\ell/2)2^{-j}, ([E(\ell/2) + 1)2^{-j}]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \theta_{j,k}(\ell 2^{-j-1}) &= \begin{cases} 0 & \text{si } E(\ell/2) \neq k \\ 1 - |\ell - 2E(\ell/2) - 1| & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq 2k + 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

5.c

Soit $(j, k) \in \mathcal{I}$. Par définition, la fonction $\theta_{j,k}$ est continue sur $[0, k2^{-j}[\cup]k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[\cup](k+1)2^{-j}, 1]$. Comme $1 - |2^{j+1}k2^{-j} - 2k - 1| = 1 - |2^{j+1}(k+1)2^{-j} - 2k - 1| = 0$, la fonction $\theta_{j,k}$ est continue sur $[0, 1]$. Soit $n > j$ et $\ell \in \mathcal{T}_n$ alors, en utilisant le résultat précédent, il existe un unique entier ℓ' tel que

$$[\ell 2^{-n}, (\ell + 1)2^{-n}] \subset [\ell' 2^{-j-1}, (\ell' + 1)2^{-j-1}] \subset [E(\ell'/2)2^{-j}, ([E(\ell'/2) + 1)2^{-j}]$$

Ainsi,

$$\forall x \in [\ell 2^{-n}, (\ell + 1)2^{-n}], \quad \theta_{j,k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } E(\ell'/2) \neq k \\ 1 - |2^{j+1}x - \ell' - 1| = 2^{j+1}x - \ell' & \text{si } \ell' = 2k \\ 1 - |2^{j+1}x - \ell' - 1| = 1 + \ell' - 2^{j+1}x & \text{si } \ell' = 2k + 1 \end{cases}$$

La fonction $\theta_{j,k}$ est donc affine sur l'intervalle $[\ell 2^{-n}, (\ell + 1)2^{-n}]$.

5.d

Montrons que si une fonction f est k_1 -lipschitzienne sur $[a, b]$ et k_2 -lipschitzienne sur $[b, c]$, elle est k -lipschitzienne sur $[a, c]$ avec $k = \max(k_1, k_2)$.

En effet, soit $(x, y) \in [a, c]^2$. Si $(x, y) \in [a, b]^2 \cup [b, c]^2$ alors

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Sinon, par symétrie des rôles joués par x et y , on peut supposer que $x \leq b \leq y$. On a alors

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(b)| + |f(b) - f(y)| \leq k|x - b| + k|b - y| = k|x - y|$$

Soient $(j, k) \in \mathcal{I}$. La fonction $\theta_{j,k}$ est constante sur $[0, k2^{-j}] \cup [(k+1)2^{-j}, 1]$ donc 0-lipschitzienne sur ces intervalles. La fonction $\theta_{j,k}$ est affine sur les intervalles $[(2k)2^{-j-1}, (2k+1)2^{-j-1}]$ et $[(2k+1)2^{-j-1}, (2k+2)2^{-j-1}]$ de pentes respectives 2^{j+1} et -2^{j+1} donc 2^{j+1} -lipschitzienne sur ces intervalles.

En appliquant le résultat précédent, on en déduit que la fonction $\theta_{j,k}$ est 2^{j+1} -lipschitzienne sur $[0, 1]$ i.e.

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(y)| \leq 2^{j+1}|x - y|$$

6

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur le segment $[0, 1]$, le théorème de Heine implique que f est uniformément continue sur $[0, 1]$, il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-N} \leq \eta$, alors

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad j \geq N \Rightarrow \left(\forall k \in \mathcal{T}_j, |c_{j,k}(f)| \leq \frac{1}{2} |f((k+1/2)2^{-j}) - f(k2^{-j})| + \frac{1}{2} |f((k+1/2)2^{-j}) - f((k+1)2^{-j})| \leq \varepsilon \right)$$

donc

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad j \geq N \Rightarrow \max_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \leq \varepsilon$$

Par conséquent, $\lim_{j \rightarrow +\infty} \max_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| = 0$.

7.a

Soient $(j, k) \in \mathcal{I}$ et $(i, \ell) \in \mathcal{I}$.

– Si $j > i$ alors la fonction $\theta_{i,\ell}$ est affine sur l'intervalle $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ donc $c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = 0$.

– Supposons $j \leq i$ alors $\theta_{i,\ell}(k2^{-j}) = \theta_{i,\ell}(k2^{i+1-j}2^{-i-1}) = 0$ d'après la question 5.b car $k2^{i+1-j} \neq 2\ell + 1$ (l'un est pair et l'autre pas). De même, $\theta_{i,\ell}((k+1)2^{-j}) = \theta_{i,\ell}((k+1)2^{i+1-j}2^{-i-1}) = 0$.

Enfin, $\theta_{i,\ell}((k+1/2)2^{-j}) = \theta_{i,\ell}((2k+1)2^{i-j}2^{-i-1})$. Or, $(2k+1)2^{i-j} = 2\ell + 1$ si et seulement si $i = j$ et $k = \ell$. Par suite, $c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = \delta_{i,j}\delta_{k,\ell}$.

7.b

Montrons que la série de fonctions $\sum f_j^a$ est normalement convergente sur $[0, 1]$ ce qui prouvera qu'elle converge uniformément sur $[0, 1]$.

Soit $j \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$ alors

$$|f_j^a(x)| \leq b_j \sum_{k \in \mathcal{T}_j} \theta_{j,k}(x)$$

et comme les fonctions $(\theta_{j,k})_{k \in \mathcal{T}_j}$ sont à support disjoints et majorées par 1, on en déduit que $|f_j^a(x)| \leq b_j$. La série $\sum b_j$ étant supposée convergente, on en déduit la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_j^a$. On note f^a sa limite.

la fonction f^a est continue puisqu'elle est limite uniforme de fonctions continues. La convergence uniforme impliquant la convergence simple en 0 et en 1, la fonction f^a s'annule en 0 et en 1. Elle appartient donc à \mathcal{C}_0 .

Soit $(j, k) \in \mathcal{I}$. Pour tout couple de fonctions continues sur $[0, 1]$, (f, g) , on a $|c_{j,k}(f) - c_{j,k}(g)| \leq 2\|f - g\|_\infty$. La convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_j^a$ vers f^a implique

$$c_{j,k}(f^a) = \lim_{N \rightarrow +\infty} c_{j,k} \left(\sum_{j'=0}^N \sum_{k' \in \mathcal{T}_{j'}} a_{j',k'} \theta_{j',k'} \right)$$

En utilisant la linéarité de $c_{j,k}$, on obtient

$$c_{j,k}(f^a) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j'=0}^N \sum_{k' \in \mathcal{T}_{j'}} a_{j',k'} c_{j,k}(\theta_{j',k'}) = a_{j,k}$$

8.a

Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ alors f' est bornée sur $[0, 1]$. On pose $M_1 = \|f'\|_\infty$. Soit $(j, k) \in \mathcal{I}$ alors le théorème des accroissements finis donne

$$|f((k+1/2)2^{-j}) - f(k2^{-j})| \leq 2^{-j-1}M_1 \quad \text{et} \quad |f((k+1/2)2^{-j}) - f((k+1)2^{-j})| \leq 2^{-j-1}M_1$$

Par inégalité triangulaire, on en déduit que $|c_{j,k}(f)| \leq 2^{-j-1}M_1$. On pose donc $M = M_1/2$ pour obtenir que

$$\forall (j, k) \in \mathcal{I}, \quad c_{j,k}(f) \leq M2^{-j}$$

Si, pour tout entier j , on pose $b_j = \max_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|$ alors, pour tout entier j , $b_j \leq M2^{-j}$.

La série à termes positifs $\sum b_j$ est donc convergente. D'après la question 7.b, on en déduit que la série de fonction $\sum g_j$ avec, pour tout entier j , $g_j = \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k} \theta_{j,k}$, converge uniformément i.e. que la suite de fonction $(S_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

8.b

Soit f de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$ alors f'' est bornée sur $[0, 1]$. On pose $M_2 = \|f''\|_\infty$. Soit $(j, k) \in \mathcal{I}$ alors l'inégalité de Taylor-Lagrange donne

$$|f(k2^{-j}) - f((k+1/2)2^{-j}) + 2^{-j-1}f'((k+1/2)2^{-j})| \leq \frac{4^{-j-1}}{2}M_2$$

et

$$|f((k+1)2^{-j}) - f((k+1/2)2^{-j}) - 2^{-j-1}f'((k+1/2)2^{-j})| \leq \frac{4^{-j-1}}{2}M_2$$

Par inégalité triangulaire, on en déduit que $|c_{j,k}(f)| \leq 4^{-j}2^{-3}M_2$. On pose donc $M' = 2^{-3}M_2$ pour obtenir que

$$\forall (j, k) \in \mathcal{I}, \quad |c_{j,k}(f)| \leq M'4^{-j}$$

9.a

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$ alors $S_n(f)$ est une combinaison linéaire de fonction affines sur l'intervalle $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$ d'après la question 5.c. Par conséquent, la fonction $S_n(f)$ est affine sur l'intervalle $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$.

9.b

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\ell \in \mathcal{T}_n$, $S_{n-1}f(\ell 2^{-n}) = f(\ell 2^{-n})$. Soit $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$.

– Si ℓ est pair, alors pour tout $k \in \mathcal{T}_n$, $\ell \neq 2k+1$ donc $\theta_{n,k}(\ell 2^{-n-1}) = 0$. Ainsi, en posant $\ell = 2p$, on a

$$S_n f(\ell 2^{-n-1}) = S_{n-1} f(p 2^{-n}) + \sum_{k \in \mathcal{T}_n} c_{n,k}(f) \theta_{n,k}(\ell 2^{-n-1}) = f(p 2^{-n}) = f(\ell 2^{-n-1})$$

– Si ℓ est impair, alors il existe $p \in \mathcal{T}_n$ tel que $\ell = 2p+1$. Pour tout $k \in \mathcal{T}_n$, $\theta_{n,k}(\ell 2^{-n-1}) = \delta_{k,p}$ donc

$$S_n f(\ell 2^{-n-1}) = S_n f((2p+1)2^{-n-1}) = S_{n-1} f((2p+1)2^{-n-1}) + \sum_{k \in \mathcal{T}_n} c_{n,k}(f) \theta_{n,k}(\ell 2^{-n-1}) = S_{n-1} f((2p+1)2^{-n-1}) + c_{n,p}(f)$$

Comme $S_{n-1}f$ est affine sur l'intervalle $[p 2^{-n}, (p+1)2^{-n}]$,

$$S_{n-1} f((2p+1)2^{-n-1}) = \frac{1}{2} (S_{n-1} f(p 2^{-n}) + S_{n-1} f((p+1)2^{-n})) = \frac{1}{2} (f(p 2^{-n}) + f((p+1)2^{-n}))$$

Par conséquent,

$$S_n f(\ell 2^{-n-1}) = \frac{1}{2} (f(p 2^{-n}) + f((p+1)2^{-n})) + c_{n,p}(f) = f((p+1/2)2^{-n}) = f(\ell 2^{-n-1})$$

Finalement, pour tout $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$, $S_n f(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$.

9.c

Pour tout entier n , on note $H(n)$ l'assertion " $\forall \ell \in \mathcal{T}_{n+1}, S_n f(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$ ".

D'après la question précédente, pour tout entier n , $H(n)$ implique $H(n+1)$. Il suffit donc de prouver $H(0)$ pour conclure par récurrence. Or, on a

$$S_0 f(0) = c_{0,0}(f) \theta_{0,0}(0) = 0 = f(0)$$

et

$$S_0 f(2^{-1}) = c_{0,0}(f) \theta_{0,0}(2^{-1}) = c_{0,0}(f) = f(1/2)$$

Ainsi, $H(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \ell \in \mathcal{T}_{n+1}, S_n f(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$$

10.a

Soit $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{C}_0$. Comme f est uniformément continue sur $[0, 1]$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-N} \leq \eta$, soit $n \geq N$ et $x \in [0, 1]$. Il existe $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$ tel que $x \in [\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$, donc

$$S_n f(x) - f(x) = S_n f(x) - S_n f(\ell 2^{-n-1}) + S_n f(\ell 2^{-n-1}) - f(\ell 2^{-n-1}) + f(\ell 2^{-n-1}) - f(x)$$

Or, on a $S_n f(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$ et $|f(\ell 2^{-n-1}) - f(x)| \leq \varepsilon$.

De plus, $S_n f$ est affine sur $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$ donc

$$S_n f(x) - S_n f(\ell 2^{-n-1}) = 2^{n+1} (x - \ell 2^{-n-1}) (S_n f((\ell+1)2^{-n-1}) - S_n f(\ell 2^{-n-1}))$$

puis

$$S_n f(x) - S_n f(\ell 2^{-n-1}) = 2^{n+1} (x - \ell 2^{-n-1}) (f((\ell+1)2^{-n-1}) - f(\ell 2^{-n-1}))$$

Comme $2^{n+1} |x - \ell 2^{-n-1}| \leq 1$ et $|f((\ell+1)2^{-n-1}) - f(\ell 2^{-n-1})| \leq \varepsilon$, on en déduit que $|S_n f(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$.

On a donc trouvé un rang N tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow (\forall x \in [0, 1], |S_n f(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon)$$

ce qui prouve que la suite $(S_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

10.b

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme les fonctions $c_{j,k}$ sont linéaires pour tout $(k, j) \in \mathcal{I}$, S_n est linéaire comme combinaison linéaire d'applications linéaires.

Soit $f \in \mathcal{C}_0$ alors $S_n f$ est continue sur $[0, 1]$ comme combinaison linéaire de fonctions continues sur $[0, 1]$ et

$$S_n f(0) = \sum_{j=0}^n \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(f) \theta_{j,k}(0) = 0 \quad \text{et} \quad S_n f(1) = \sum_{j=0}^n \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(f) \theta_{j,k}(1) = 0$$

donc $S_n f \in \mathcal{C}_0$. De plus,

$$S_n(S_n f) = \sum_{j=0}^n \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(S_n f) \theta_{j,k}$$

Soit $(j, k) \in \mathcal{I}$ alors par linéarité de $c_{j,k}$, $c_{j,k}(S_n f) = \sum_{j'=0}^n \sum_{k' \in \mathcal{T}_{j'}} c_{j',k'}(f) c_{j,k}(\theta_{j',k'}) = c_{j,k}(f)$.

D'où,

$$S_n(S_n f) = \sum_{j=0}^n \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(f) \theta_{j,k} = S_n f$$

ce qui prouve que S_n est un projecteur dont l'image est incluse dans \mathcal{C}_0 .

Si on prend $f = \theta_{0,0}$ alors $S_n f = f$ donc la norme subordonnée à S_n est supérieure ou égale à 1.

Soit $f \in \mathcal{C}_0$. Comme la fonction $S_n f$ est continue et affine par morceaux de subdivision adaptée $(k2^{-n-1})_{k \in \llbracket 0, 2^{n+1} \rrbracket}$. Elle atteint ses bornes en un point de cette subdivision. Or, en ces points, elle coïncide avec f donc $\|S_n f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Ainsi, la norme subordonnée à S_n est égale à 1.

11.a

Soit $s \in]0, 1[$. La fonction $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^s$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f''(x) = s(s-1)x^{s-2} \geq 0$$

donc f est concave sur \mathbb{R}^{+*} . Par conséquent, pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, on a

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^s \geq \frac{a^s + b^s}{2}$$

ce qui implique $(a+b)^s \geq 2^{s-1}(a^s + b^s)$. Comme le résultat est conservé si a ou b est nul, on en déduit que

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad a^s + b^s \leq 2^{1-s}(a+b)^s$$

11.b

Soit $f \in \Gamma^s(x_0) \cap \mathcal{C}_0$. Par définition, il existe une constante M telle que

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f(x) - f(x_0)| \leq M |x - x_0|^s$$

Soit $(j, k) \in \mathcal{I}$ alors

$$c_{j,k}(f) = f((k+1/2)2^{-j}) - f(x_0) - \frac{1}{2} (f(k2^{-j}) - f(x_0)) - \frac{1}{2} (f((k+1)2^{-j}) - f(x_0))$$

donc

$$|c_{j,k}(f)| \leq M |(k+1/2)2^{-j} - x_0|^s + \frac{M}{2} |k2^{-j} - x_0|^s + \frac{M}{2} |(k+1)2^{-j} - x_0|^s$$

Or, la croissance de la fonction $x \mapsto x^s$ sur \mathbb{R}^{+*} et une inégalité triangulaire donnent

$$|(k+1/2)2^{-j} - x_0|^s \leq (|k2^{-j} - x_0| + 2^{-j-1})^s$$

D'autre part,

$$|k2^{-j} - x_0|^s + |(k+1)2^{-j} - x_0|^s \leq 2^{1-s} (|k2^{-j} - x_0| + |(k+1)2^{-j} - x_0|)^s \leq 2^{1-s} (2|k2^{-j} - x_0| + 2^{-j})^s$$

donc

$$|k2^{-j} - x_0|^s + |(k+1)2^{-j} - x_0|^s \leq 2 (|k2^{-j} - x_0| + 2^{-j-1})^s$$

Ainsi, en posant $c_1 = 2M$, on obtient

$$|c_{j,k}(f)| \leq c_1 (|k2^{-j} - x_0| + 2^{-j})^s$$

3. Minoration de l'exposant de Hölder ponctuel

12

Soit $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\begin{aligned} 2^{-n-1} < |x - x_0| \leq 2^{-n} &\Leftrightarrow -(n+1) \ln 2 < -\ln(|x - x_0|) \leq -n \ln 2 \\ &\Leftrightarrow n \leq \frac{\ln(|x - x_0|)}{\ln 2} < n+1 \end{aligned}$$

Par unicité de la partie entière, il existe un unique $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-n_0-1} < |x - x_0| \leq 2^{-n_0}$ donné par

$$n_0 = E\left(-\frac{\ln(|x - x_0|)}{\ln 2}\right)$$

13

Soit $j \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathcal{T}_j$, la fonction $\theta_{k,j}$ est à support dans $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$. Ainsi, $\theta_{k,j}(x)$ est nul si $k \neq \tilde{k}_j(x)$ et $\theta_{k,j}(x_0)$ est nul si $k \neq \tilde{k}_j(x_0)$. Par conséquent,

$$W_j \leq |c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)| \left| \theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x) - \theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x_0) \right| + |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| \left| \theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x) - \theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x_0) \right|$$

(avec égalité si $\tilde{k}_j(x) \neq \tilde{k}_j(x_0)$).

Or, d'après la question 5.d, pour tout $k \in \mathcal{T}_j$, $|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| \leq 2^{j+1}|x - x_0|$ donc

$$W_j \leq \left(|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)| + |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| \right) 2^{j+1}|x - x_0|$$

14.a

Soit $j \leq n_0$. Par hypothèse,

$$\left| c_{j,\tilde{k}_j(x)} \right| + \left| c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f) \right| \leq c_1 \left(\left| \tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0 \right| + 2^{-j} \right)^s + c_1 \left(\left| \tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0 \right| + 2^{-j} \right)^s$$

Or,

$$\left| \tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0 \right| \leq 2^{-j} \quad \text{et} \quad \left| \tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0 \right| \leq \left| \tilde{k}_j(x)2^{-j} - x \right| + |x - x_0| \leq 2^{-j} + |x - x_0|$$

donc

$$\left| c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f) \right| + \left| c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f) \right| \leq c_1 (|x - x_0| + 2^{-j+1})^s + c_1 (2^{-j+1})^s \leq c_1 2^{1-s} (|x - x_0| + 2^{-j+2})^s$$

Comme $|x - x_0| \leq 2^{-n_0} \leq 2^{-j}$, on en déduit que

$$\left| c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f) \right| + \left| c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f) \right| \leq c_1 2^{1-s} (2^{-j} + 2^{-j+2})^s \leq c_1 2^{1-s} (2^{-j+1} + 2^{-j+2})^s = c_1 2^{1-s} 2^{-(j+1)s} 3^s$$

donc $\left(\left| c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f) \right| + \left| c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f) \right| \right) 2^{j+1} \leq c_1 2^{1-s} 2^{-(j+1)s} 3^s 2^{j+1} = 4c_1 2^{(1-s)j} 3^s$. Par suite,

$$W_j \leq 4c_1 2^{(1-s)j} 3^s |x - x_0|$$

14.b

D'après la question précédente

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} \left| c_{j,\tilde{k}_j}(f) \right| \left| \theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0) \right| &= \sum_{j=0}^{n_0} W_j \\ &\leq \sum_{j=0}^{n_0} 4c_1 2^{(1-s)j} 3^s |x - x_0| \\ &\leq 4c_1 3^s |x - x_0| \frac{1 - 2^{(1-s)(n_0+1)}}{1 - 2^{(1-s)}} \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} \left| c_{j,\tilde{k}_j}(f) \right| \left| \theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0) \right| \leq 4c_1 3^s |x - x_0| \frac{2^{(1-s)(n_0+1)}}{2^{(1-s)} - 1}$$

et comme $2^{n_0} \leq |x - x_0|^{-1}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} \left| c_{j, \tilde{k}_j} (f) \right| \left| \theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0) \right| &\leq 4c_1 3^s |x - x_0| \frac{2^{(1-s)} |x - x_0|^{s-1}}{2^{(1-s)} - 1} \\ &\leq 8c_1 (3/2)^s |x - x_0|^s \frac{1}{2^{(1-s)} - 1} \\ &\leq c_2 |x - x_0|^s \end{aligned}$$

15

Soit $j \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, $\left| c_{j, \tilde{k}_j(x_0)} (f) \right| \leq c_1 \left(\left| \tilde{k}_j(x_0) 2^{-j} - x_0 \right| + 2^{-j} \right)^s$.

Or, $\left| \tilde{k}_j(x_0) 2^{-j} - x_0 \right| \leq 2^{-j}$ donc $\left| c_{j, \tilde{k}_j(x_0)} (f) \right| \leq c_1 2^{s(1-j)}$.

Pour tout $k \in \mathcal{T}_j$, $\theta_{j,k}(x_0)$ est nul si $k \neq \tilde{k}_j(x_0)$ donc

$$\sum_{k \in \mathcal{T}_j} \left| c_{j,k}(f) \right| \left| \theta_{j,k}(x_0) \right| = \left| c_{j, \tilde{k}_j(x_0)} (f) \right| \left| \theta_{j, \tilde{k}_j(x_0)} (x_0) \right| \leq \left| c_{j, \tilde{k}_j(x_0)} (f) \right| \leq c_1 2^{s(1-j)}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \sum_{j=n_0+1}^{\infty} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} \left| c_{j,k}(f) \right| \left| \theta_{j,k}(x_0) \right| &\leq c_1 \sum_{j=n_0+1}^{\infty} 2^{s(1-j)} \\ &\leq c_1 2^{-sn_0} \frac{1}{1 - 2^{-s}} \\ &\leq c_1 2^{-s(n_0+1)} \frac{2^s}{1 - 2^{-s}} \\ &\leq c_1 \frac{2^s}{1 - 2^{-s}} |x - x_0|^s = c_3 |x - x_0|^s \end{aligned}$$

16

On définit l'ensemble E de la manière suivante :

$$E = \{n \in \mathbb{N} : \omega_f(2^{-n}) \geq 2^{-n_0 s}\}$$

– La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$, donc elle atteint ses bornes. Comme $\|f\|_{\infty} = 1$, il existe $x \in [0, 1]$ tel que $|f(x)| = 1$. De plus, f s'annule en 0. On en déduit donc que $\omega_f(1) \geq 1$, ce qui montre que l'ensemble E est non vide.

– Comme ω_f est continue en 0, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_f(2^{-n}) = \omega_f(0) = 0$$

ce qui montre que l'ensemble E est majoré.

L'ensemble E est donc une partie de \mathbb{N} non vide et majorée. Elle possède donc un élément maximal que l'on note n_1 .

Comme la fonction ω_f est croissante, on a donc $E = \llbracket 0, n_1 \rrbracket$.

Comme $n_1 + 1 \notin E$, l'entier n_1 vérifie bien

$$\omega_f(2^{-n_1-1}) < 2^{-n_0 s} \leq \omega_f(2^{-n_1})$$

Enfin, si un autre entier n_2 vérifie la même égalité, alors $n_2 \in \llbracket 0, n_1 \rrbracket$ et $n_2 + 1 \notin \llbracket 0, n_1 \rrbracket$ donc $n_2 = n_1$. Par suite, l'entier n_1 est unique.

17

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$. Il existe $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$ tel que $x \in [\ell 2^{-n-1}, (\ell + 1) 2^{-n-1}]$ donc

$$S_n f(x) - f(x) = S_n f(x) - S_n f(\ell 2^{-n-1}) + S_n f(\ell 2^{-n-1}) - f(\ell 2^{-n-1}) + f(\ell 2^{-n-1}) - f(x)$$

Or, $S_n f(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$ et $|f(\ell 2^{-n-1}) - f(x)| \leq \omega_f(2^{-n-1})$.

Comme $S_n f$ est affine sur l'intervalle $[\ell 2^{-n-1}, (\ell + 1) 2^{-n-1}]$,

$$\left| S_n f(x) - S_n f(\ell 2^{-n-1}) \right| \leq \left| S_n f((\ell + 1) 2^{-n-1}) - S_n f(\ell 2^{-n-1}) \right| = \left| f((\ell + 1) 2^{-n-1}) - f(\ell 2^{-n-1}) \right| \leq \omega_f(2^{-n-1})$$

Ainsi, si $n \geq n_1$ alors

$$\left| S_n f(x) - f(x) \right| \leq 2\omega_f(2^{-n-1}) \leq 2 \times 2^{-n_0 s} = 2^{1+s} 2^{(-n_0-1)s} \leq 2^{1+s} |x - x_0|^s$$

donc $\|f - S_n f\|_\infty \leq 2^{1+s}|x - x_0|^s$.

18.a

Soit $j \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathcal{T}_j$, $\theta_{j,k}(x)$ est nul si $k \neq \tilde{k}_j(x)$ donc

$$\sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x)| = |c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)| |\theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x)| \leq |c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)| \leq c_1 \left(|\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0| + 2^{-j} \right)^s$$

Or, $|\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0| \leq |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x| + |x - x_0| \leq 2^{-j} + |x - x_0|$ d'où

$$\sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x)| \leq c_1 (2^{1-j} + |x - x_0|)^s$$

Si $j \geq n_0 + 1$ alors $2^{-j} \leq 2^{-n_0-1} \leq |x - x_0|$. Ainsi,

$$\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x)| \leq c_1 3^s |x - x_0|^s (n_1 - n_0)$$

18.b

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse, $\omega_f(2^{-n_1}) \leq c_4(N)(1 + n_1)^{-N}$ donc, par décroissance de la fonction $x \mapsto x^{-1/N}$ sur \mathbb{R}^{+*} ,

$$n_1 - n_0 \leq 1 + n_1 \leq \left(\frac{c_4(N)}{\omega_f(2^{-n_1})} \right)^{1/N}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x)| &\leq c_1 3^s c_4(N)^{1/N} |x - x_0|^s (2^{n_0 s})^{1/N} \\ &\leq c_1 3^s c_4(N)^{1/N} |x - x_0|^s |x - x_0|^{-s/N} \\ &\leq c_5(N) |x - x_0|^{s(1-1/N)} \end{aligned}$$

19

Comme $f(x) - f(x_0) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(f) (\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0))$, les estimations précédentes conduisent à

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c_2 |x - x_0|^s + c_3 |x - x_0|^s + \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x)|$$

Si $n_0 < n_1$ alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x)| &\leq c_5(N) |x - x_0|^{s(1-1/N)} + \|f - S_{n_1} f\|_\infty \\ &\leq c_5(N) |x - x_0|^{s(1-1/N)} + 2^{1+s} |x - x_0|^s \end{aligned}$$

On en déduit que $f \in \Gamma^{s(1-1/N)}$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ donc $\alpha_f(x_0) \geq s$.

Si $n_1 \leq n_0$ alors

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| \\ &\leq \|f - S_{n_0} f\|_\infty + \sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| \end{aligned}$$

et en utilisant les estimations précédentes

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2^{1+s} |x - x_0|^s + c_2 |x - x_0|^s$$

donc $f \in \Gamma^s$ puis $\alpha_f(x_0) \geq s$.