X-ENS 2013

Mathématiques B

Un corrigé proposé par : ***AQALMOUN MOHAMED*** *agrégé de mathématiques CPGE Khouribga*

Première partie : Définition de l'exposant d'Hölder ponctuel

1. (a) *La fonction nulle est un élément de $\Gamma^s(x_0)$, et si f, g sont deux éléments de $\Gamma^s(x_0)$ et λ un réel , alors , pour tout $x \in [0,1]\backslash\{x_0\}$ on a l'inégalité :*
$$\frac{|(f+\lambda g)(x)-(f+\lambda g)(x_0)|}{|x-x_0|^s} \leq \sup_{x\in[0,1]\backslash\{x_0\}} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s} + |\lambda| \sup_{x\in[0,1]\backslash\{x_0\}} \frac{|g(x)-g(x_0)|}{|x-x_0|^s},$$
donc
$$\sup_{x\in[0,1]\backslash\{x_0\}} \frac{|(f+\lambda g)(x)-(f+\lambda g)(x_0)|}{|x-x_0|^s} < +\infty.$$
Il en résulte que $f+\lambda g$ est un élément de Γ^s.
Soient s_1 et s_2 deux réels tels que $0 \leq s_1 \leq s_2 < 1$, pour tout $x \in [0,1]$ on a $x - x_0 \in]0,1]$ et la fonction $s \mapsto |x-x_0|^s$ est décroissante sur $[0,1]$, donc $\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{s_1}} \leq \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{s_2}}$, il en résulte que si $f \in \Gamma^{s_2}(x_0)$ alors f est aussi dans $\Gamma^{s_1}(x_0)$.
$f \in \Gamma^0$ si, et seulement si, la fonction $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ est bornée si, et seulement si, f est bornée ; et comme tout élément de $\mathcal{C}$ est borné, alors $\Gamma^0(x_0) = \mathcal{C}$.

   (b) *Si $f \in \mathcal{C}$ est dérivable en x_0, alors la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet un prolongement par continuité en x_0,ce prolongement est continue sur $[0,1]$ donc borné sur $[0,1]$, en particulier la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est borné sur $[0,1]\backslash\{x_0\}$, on en déduite alors l'existence d'une constante M telle que $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)-f(x_0)| \leq M|x-x_0|$, considérons maintenant un réel $s \in [0,1[$,puisque $|x-x_0| \leq 1$ alors on a $|x-x_0| \leq |x-x_0|^s$, d'où $\forall x \in [0,1]$; $|f(x)-f(x_0)| \leq M|x-x_0|^s$, et donc $f \in \Gamma^s$.*

   (c) *Pour $x_0 \in]0,1]$, on considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x-x_0|$, f n'est pas dérivable en x_0, mais pour tout $s \in [0,1[$, la fonction $x \mapsto \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s} = |x-x_0|^{1-s}$ est borné sur $[0,1]\backslash\{x_0\}$, c'est-à-dire $f \in \Gamma^s(x_0)$, $\forall s \in [0,1[$.*

2. *$p(x) = 2|\frac{1}{2}-x|^{\frac{1}{2}}\sqrt{|\frac{1}{2}+x|}$, pour $s \in [0,1[$ et $x \neq x_0$, on a $\frac{|p(x)-p(x_0)|}{|x-\frac{1}{2}|^s} = 2|\frac{1}{2}-x|^{\frac{1}{2}-s}\sqrt{|\frac{1}{2}+x|}$, ainsi, la fonction $x \mapsto \frac{|p(x)-p(x_0)|}{|x-\frac{1}{2}|^s}$ est bornée si, et seulement si, $s \leq \frac{1}{2}$, on en déduit alors que $\{s \in [0,1[\ ,\ f \in \Gamma^s\} = [0,\frac{1}{2}]$, et par suite $\alpha_f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.*

3. (a) *Soient $h, h' \in [0,1]$ tels que $h \leq h'$.*
Notons $A_f(h) = \{|f(x)-f(y)|\ \ ,\ x,y \in [0,1]$ et $|x-y| \leq h\}$ de même on définie $A_f(h')$, de sorte que $\omega_f(h) = \sup A_f(h), ;$ si $x,y \in [0,1]$ tels que $|x-y| \leq h$, alors $|x-y| \leq h'$ et donc $|f(x)-f(y)| \in A_f(h')$, on a alors l'inclusion $A_f(h) \subset A_f(h')$, il vient alors que $\omega_f(h) \leq \omega_f(h')$.
<u>Continuité de ω_f en 0</u> : $\omega_f(0) = 0$

f étant continue sur le compact $[0,1]$, donc uniformément continue sur $[0,1]$ (C'est le théorème de **Heine***).*
Soit ε un réel strictement positif, il existe alors η strictement positif, tel que $\forall x, y \in [0,1]$ on ait $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.
Soit $h \in [0,1]$ tel que $h \leq \eta$, pour tout $x, y \in [0,1]$ tel que $|x-y| \leq h$, on a aussi $|x-y| \leq \eta$ donc $|f(x)-f(y)| \leq \epsilon$, ainsi $\forall x, y \in [0,1]$ tels que $|x-y| \leq h$, on a $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$, il en résulte alors que $\omega_f(h) \leq \varepsilon$.
On en déduite que ω_f est continue en 0.

(b) *Soient $h, h' \in [0,1]$ tels que $h \leq h'$.*
Soient $x, y \in [0,1]$ tels que $|x-y| \leq h'$, on considère un réel $z \in [0,1]$ tel que $|x-z| \leq h-h'$ et $|z-y| \leq h$ (un tel réel existe puisque $[x-(h'-h), x+(h'-h)] \cap [y-h, y+h] \cap [0,1]$ est non vide).
Puisque $|f(x)-f(y)| \leq |f(z)-f(y)| + |f(z)-f(x)|$, alors $|f(x)-f(y)| \leq \omega_f(h) + \omega_f(h'-h)$, on a alors pour tout $x, y \in [0,1]$, tels que $|x-y| \leq h'$, $|f(x)-f(y)| \leq \omega_f(h) + \omega_f(h'-h)$, un passage à la borne sup, donne $\omega_f(h') \leq \omega(h) + \omega(h'-h)$.

Remarque : *Si $0 \leq h \leq h' \leq 1$, on a $\omega_f(h') - \omega_f(h) \leq \omega_f(h'-h)$, ou encore, puisque ω_f croissante $|\omega_f(h') - \omega_f(h)| \leq \omega_f(h'-h)$, et de même si $0 \leq h \leq h' \leq 1$, on a $|\omega_f(h') - \omega(h)| \leq \omega_f(h-h')$, de façon générale :*

$$\boxed{\forall h, h' \in [0,1] \ , \quad |\omega_f(h') - \omega_f(h)| \leq \omega_f(|h'-h|)}$$

(c) *Soit $h \in [0,1]$, et $(h_n)_n$ une suite de nombres réels à valeurs dans $[0,1]$, convergente de limite h, la suite $(|h-h_n|)_n$ est convergente de limite nulle, la fonction ω_f étant continue en 0, donc la suite $(\omega_f(|h_n-h|))_n$ tend vers 0, or $|\omega_f(h_n) - \omega_f(h)| \leq \omega_f(|h_n - h|)$ alors, la suite $(\omega_f(h_n))_n$ tend vers $\omega_f(h)$. Ce qui montre la continuité de ω_f en h, donc continue sur $[0,1]$.*

4. (a) *Soit $s \in [0,1[$, par hypothèse, il existe $M \in \mathcal{R}$, tel que $\forall h \in]0,1]$, $\dfrac{\omega_f(h)}{h^s} \leq M$, Soit $x_0 \in [0,1]$ fixé. Pour $x \in [0,1] \setminus \{x_0\}$, on pose $h = |x-x_0| \leq 1$, on a alors $|x-x_0| \leq h$, donc $|f(x)-f(x_0)| \leq \omega_f(h) \leq Mh^s = M|x-x_0|^s$, d'où $\dfrac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s} \leq M$. Ainsi $f \in \Gamma^s(x_0)$.*

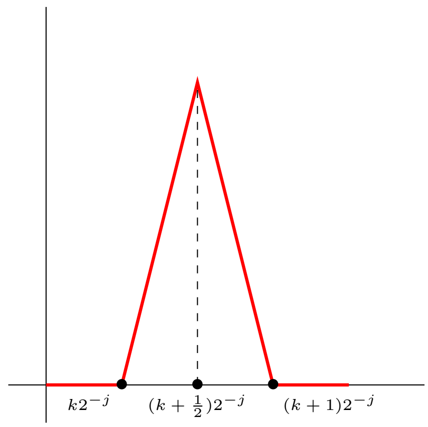
(b) *Soit $x_0 \in [0,1]$:*
• *Si $x_0 \neq 0$: p est alors dérivable en x_0, et d'après la question 1.b, $\forall s \in [0,1[$ $p \in \Gamma^s(x_0)$ et par la suite $\alpha_p(x_0) = 1$.*
• *Si $x_0 = 0$: Pour tout $s \in [0,1[$, la fonction $x \mapsto \frac{|p(x)|}{|x|^s} = x^{1-s} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ est bornée sur $]0,1]$, donc $\forall s \in [0,1[$, $p \in \Gamma^s(0)$, d'où $\alpha_p(0) = 1$.*
Pour montrer que $\dfrac{\omega_q(h)}{\sqrt{h}}$ ne tend pas vers 0, il suffit de démontrer l'existence d'une suite $(x_n)_n$ à valeurs dans $]0,1]$, qui tend vers 0 mais $\dfrac{\omega_q(x_n)}{\sqrt{x_n}}$ ne tend pas vers 0.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, bien sûr cette suite tend vers 0 .
On a $|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}| = \dfrac{1}{n(n+1)} \leq \dfrac{1}{n^2}$, donc $|q(\frac{1}{n+1}) - q(\frac{1}{n})| \leq \omega_q(\frac{1}{n^2}) = \omega_q(x_n)$, et d'autre part $|q(\frac{1}{n+1}) - q(\frac{1}{n})| = |\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}| = \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$, il vient que $\dfrac{\omega_q(x_n)}{\sqrt{x_n}} \geq \dfrac{2n^2+n}{n^2+n} \geq 1$, donc la suite $\dfrac{\omega_q(x_n)}{\sqrt{x_n}}$ ne tend pas vers 0.

Deuxième partie :
Le système de Schauder

Remarques : *:*

☞ $\theta_{j,k}(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in [0, k2^{-j}], \\ 2^{j+1}x - 2k & si \quad x \in [k2^{-j}, (k+\frac{1}{2})2^{-j}], \\ -2^{j+1}x + 2k - 1 & si \quad x \in [(k+\frac{1}{2})2^{-j}, (k+1)2^{-j}], \\ 0 & si \quad x \in [(k+1)2^{-j}, 1]. \end{cases}$

☞ *La courbe de* $\theta_{j,k}$ *:*



☞ *Si* I *est un intervalle inclus dans le segment* $[0,1]$*, alors la fonction* $\theta_{j,k}$ *est affine sur* I *si, et seulement si, les trois points "Pics"* $k2^{-j}$*,* $(k+\frac{1}{2})2^{-j}$ *et* $(k+1)2^{-j}$*, ne sont pas à l'intérieur de* I*. En effet :*
Si ces trois points ne sont pas à l'intérieur de I*, alors l'intervalle* I *est inclus dans l'un des quatre segments suivants* $[0, k2^{-j}]$ *,* $[k2^{-j}, (k+\frac{1}{2})2^{-j}]$ *,* $[(k+\frac{1}{2})2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ *ou* $[(k+1)2^{-j}, 1]$ *sur lesquels la fonction* $\theta_{j,k}$ *est affine.*

☞ *En pratique, pour démontrer que la fonction* $\theta_{j,k}$ *est affine sur le segment* I*, il suffit de démontrer que les trois points "Pics" ne sont pas à l'intérieur de* I*.*

5. (a)

$$\begin{aligned} [k2^{-j-1}, (k+1)2^{-j-1}] &\subset [k'2^{-j}, (k'+1)2^{-j}] \\ &\Leftrightarrow k'2^{-j} \leq k2^{-j-1} \leq (k+1)2^{-j-1} \leq (k'+1)2^{-j} \\ &\Leftrightarrow 2k' \leq k \leq k+1 \leq 2k'+2 \\ &\Leftrightarrow 2k' \leq k < 2k+2 \\ &\Leftrightarrow k' \leq \frac{k}{2} < k'+1 \\ &\Leftrightarrow k' = [\frac{k}{2}] \quad \text{La partie entière de } \frac{k}{2} \end{aligned}$$

$0 \leq k < 2^{j+1}$, alors $k' \leq \frac{k}{2} < 2^j$, c'est-à-dire $k' \in \mathcal{T}_j$.

(b) Soient $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathcal{T}_j$ et $\ell \in \mathcal{T}_{j+1}$.
$k2^{-j} \leq \ell 2^{-j-1} \leq (k+1)2^{-j}$ *si, et seulement si,* $2k \leq \ell \leq 2(k+1)$*si, et seulement si,* $k \in \{2k, 2k+1, 2k+2\}$, et on a :

$\theta_{j,k}(2k2^{-j-1}) = 1 - |2k - 2k - 1| = 0$, $\theta_{j,k}((2k+1)2^{-j-1}) = 1 - |2k+1-2k+1| = 1$ et $\theta_{j,k}((2k+2)2^{-j-1}) = 1 - |2k+2-2k+1| = 0$, on a alors $\theta_{j,k}(\ell 2^{-j-1}) = 1$ *si* $\ell = 2k+1$ et 0 *sinon.*

(c) *On a affaire aux deux points $k2^{-j}$ et $(k+1)2^{-j}$.*
La fonction $\theta_{j,k}$ est continue sur $[0,1]\backslash\{k2^{-j},(k+1)2^{-j}\}$, et de plus $\sum_{x\to k2^{-j}}\theta_{j,k}(x) = \lim_{x\to(k+1)2^{-j}}\theta_{j,k}(x)=0$, *alors f est continue sur $[0,1]$.*
D'après la remarque ci-dessus, il suffit de démontrer que les points $k2^{-j}$, $(k+\frac{1}{2})2^{-j}$ et $(k+1)2^{-j}$ ne sont pas à l'intérieure de l'intervalle $[\ell 2^{-n},(\ell+1)2^{-n}]$.
Si $\ell 2^{-n} < k2^{-j} < (\ell+1)2^{-n}$ alors $\ell < k2^{n-j} < \ell+1$, mains $n > j$ et donc $k2^{n-j}$ est un entier qui est compris strictement entre deux entiers successifs, ce qui est alors impossible.
Si $\ell 2^{-n} < (k+\frac{1}{2})2^{-j} < (\ell+1)2^{-n}$, on obtient $2\ell < (2k+1)2^{n-j} < 2\ell+2$, puisque $n-j>0$, on alors un entier pair qui est compris strictement entre deux entiers pairs successifs, ce qui est aussi impossible.
Par la même façon , pour le troisième nombre.

(d) *Soient $(j,k)\in\mathcal{I}$, et $(x,y)\in[0,1]^2$, pour simplifier on peut supposer que $x\le y$;*
<u>Si $x,y\in[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]$</u> : dans ce cas
$|\theta_{j,k}(x)-\theta_{j,k}(y)| = |2^{j+1}x-2k-1|-|2^{j+1}y-2k-1|| \le 2^{j+1}|x-y|$
<u>Si $x,y\notin[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]$</u> : les images sont nulles, donc l'inégalité est vérifiée.
<u>Si $x<k2^{-j}$ et $y\in[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]$</u> ; dans ce cas
$|\theta_{j,k}(x)-\theta_y| = |1-|2^{j+1}y-2k-1|| \le |2^{j+1}x-2k|$, *par hypothèse on a $0\le 2^{j+1}x<2k$ et $2k\le 2^{j+1}$, on obtient alors l'encadrement suivant : $0\le 2^{j+1}y-2k\le 2^{j+1}y-2^{j+1}x = 2^{j+1}|y-x|$, ce qui donne $|\theta_{j,k}(x)-\theta_{j,k}(y)|\le 2^{j+1}|y-|$.*
<u>Si $x\in[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]$ et $y\le(k+1)é^{-j}$</u> : de même on obtient l'encadrement $0\le 2^{j+1}x-2k-2\le 2^{j+1}(y-x)=2^{j+1}|x-y|$, et d'autre part on a $|\theta_{j,k}(x)-\theta_{j,k}(y)| = |1-|2^{j+1}x-2k-1||\le|2^{j+1}x-2k-2|$, il en résulte que $|\theta_{j,k}(x)-\theta_{j,k}(y)|\le 2^{j+1}|x-y|$.
On résume, pour tout $x,y\in[0,1]$, $|\theta_{j,k}(x)-\theta_{j,k}(y)|\le 2^{j+1}|x-y|$.

6. *Encore, la continuité uniforme :*
f continue sur le compact $[0,1]$, donc uniformément continue.
Fixons un ε strictement positif, et soit η tel que , pour tout $x,y\in[0,1]$ tels que $|x-y|\le\eta$ on ait $|f(x)-f(y)|\le\varepsilon$.
Comme la suite $(2^{-j-1})_0$ tend vers 0, il existe alors $j_0\in\mathbb{N}$, tel que pour tout $j\in\mathbb{N}$ avec $j\ge j_0$, on ait $2^{-j-1}\le\eta$. Pour $j\ge j_0$ et $k\in\mathcal{T}_j$, on a :
$|c_{j,k}(f)| \le \frac{1}{2}|f((k+\frac{1}{2})2^{-j})-f(k2^{-j})|+\frac{1}{2}|f((k+1)2^{-j})-f((k+\frac{1}{2})2^{-j})|$, *et comme $(k+\frac{1}{2})2^{-j}-k2^{-j}=2^{-j-1}\le\eta$ et $(k+1)2^{-j}-(k+\frac{1}{2})2^{-j}=2^{-j-1}\le\eta$, alors $|c_{k,j}(f)|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, la dernière inégalité et valable, pour tout $k\in\mathcal{T}_j$, donc $\max_{k\in\mathcal{T}_j}|c_{j,k}(f)|\le\varepsilon$.*
Maintenant, on a , pour tout $j\ge j_0$, $\max_{k\in\mathcal{T}_j}|c_{j,k}(f)|\le\varepsilon$, d'où ; $\lim_{j\to\infty}\max_{k\in\mathcal{T}_j}|c_{j,k}(f)|=0$.

7. (a) *Calcul de $c_{j,k}(\theta_{i,\ell})$:*
• *Cas : $i<j$:*
D'après la question 5.c la fonction $\theta_{i,\ell}$ est affine sur l'intervalle $[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]$, par le calcul du taux de variation de $\theta_{i,\ell}$ qui est constant (dans cet intervalle), il vient que
$\theta_{i,\ell}((k+1)2^{-j})-\theta_{i,\ell}((k+\frac{1}{2})^{-j}) = \theta_{i,\ell}((k+\frac{1}{2})2^{-j})-\theta_{i,\ell}(k2^{-j})$, *ce qui donne*
$\theta_{i,\ell}((k+\frac{1}{2}))2^{-j}-\frac{\theta_{i,\ell}(k2^{-j})+\theta_{i,\ell}((k+1)2^{-j})}{2}=0$, *dans ce cas $c_{j,k}(\theta_{i,\ell})=0$.*
• *Cas $j<i$:*
Les deux nombres $k2^{-j}$, $(k+\frac{1}{2})2^{-j}$ et $(k+1)2^{-j}$ ne sont pas à l'intérieur de l'intervalle $[\ell 2^{-i},(\ell+1)2^{-i}]$: en fait si $\ell 2^{-i}<(k+\varepsilon)2^{-j}<(\ell+1)2^{-i}$ avec $\varepsilon=0$ ou $\frac{1}{2}$ ou 1, alors $\ell<(k+\varepsilon)2^{i-j}<\ell+1$ et comme $(k+\varepsilon)2^{i-j}$ est un entier dans les deux cas ($\varepsilon=0$ ou 1) ces inégalités sont impossibles, dans le cas $\varepsilon=\frac{1}{2}$, on a $2\ell<(2k+1)2^{i-j}<2\ell+2$,

mais $i-j\geq 1$, donc $(2k+1)2^{i-j}$ est un entier pair compris strictement entre deux entiers pairs successifs, ce qui est encore impossible.
En on déduit alors que l'intervalle, $[\ell 2^{-i},(\ell+1)2^{-i}]$ est inclus dans l'un des intervalles $[0,k2^{-j}]$,$[k2^{-j},(k+\frac{1}{2})2^{-j}]$, $[(k+\frac{1}{2})2^{-j},(k+1)2^{-j}]$ ou $[(k+1)2^{-j},1]$, dans les quatre cas la fonction $\theta_{i,\ell}$ est nulle en $k2^{-j}$, $(k+\frac{1}{2})2^{-j}$ et $(k+1)2^{-j}$, il en résulte alors que $c_{j,k}(\theta_{i,\ell})=0$.
• Cas $i=j$:
Si $k\neq\ell$, alors l'intersection des deux intervalle $[\ell 2^{-i},(\ell+1)2^{-i}]$ et $[k2^{-i},(k+1)2^{-i}]$ est vide ou réduit à l'une extrémité du premier intervalle, ainsi la fonction $\theta_{i,\ell}$ est nulle sur l'intervalle $[k2^{-i},(k+1)2^{-j}]$, on en déduit alors que $c_{j,k}(\theta_{i,\ell})=0$
Si $k=l$, $c_{j,k}(\theta_{j,k})=\theta_{j,k}((k+\frac{1}{2})2^{-j})=1$.
Conclusion :

$$\boxed{c_{j,k}(\theta_{i,\ell})=\delta_{(j,k),(i,\ell)}}$$

(b) *La covergence uniforme de la série $\sum f_j^a$ sur le segment $[0,1]$;*
Pour $j\in\mathbb{N}$, et $x\in[0,1]$, $k\in\mathcal{T}_j$ si $k\neq\tilde{k}_j(x)$, on a $\theta_{j,k}(x)=0$, donc $f_j^a(x)=\theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x)$, on obtient la majoration suivante $|f_j^a(x)|\leq\max\limits_{k\in\mathcal{T}_j}|a_{j,k}|=b_j$, ou encore $\|f_j^a\|_\infty\leq b_j$, puisque la série $\sum b_j$ converge ,alors la série $\sum f_j^a$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,1]$.
Pour tout $j\in\mathbb{N}$, on a $f_j^a(0)=f_j^a(1)=0$, la convergence simple de la série $\sum f_j^a$ implique que $f^a(0)=f^a(1)=0$, de plus la convergence uniforme assure que la fonction f^a est continue, il en résulte alors que f^a est un élément de $\mathcal{C}_0$.
Soit $(j_0,k_0)\in\mathcal{I}$, L'application $c_{j_0,k_0}:\mathcal{C}_0\to\mathbb{R}$ est continue ($|c_{j_0,k_0}(f)|\leq 2\|f\|_\infty$), alors $c_{j_0,k_0}(f^a)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{k\in\mathcal{T}_j}a_{j,k}c_{j_0,k_0}(\theta_{j,k})=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{k\in\mathcal{T}_j}a_{j,k}\delta_{(j_0,k_0),(j,k)}$, dans cette somme un seul terme qui peut être non nul , le terme correspondant à l'indice (j_0,k_0), on obtient alors $c_{j_0,k_0}(f^a)=a_{j_0,k_0}$.

8. (a) *On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$.*
f' étant continue sur $[0,1]$, donc bornée, il existe alors une constante $\alpha\in\mathbb{R}$, telle que $\|f'\|\leq\alpha$.
Par le théorème des accroissements finis, ils existe deux constantes a et b dans $[0,1]$ telles :
$f((k+\frac{1}{2})2^{-j})-f(k2^{-j})=2^{-j}f'(a)$ et
$f((k+1)2^{-j})-f((k+\frac{1}{2})2^{-j})=2^{-j}f'(b)$, et donc par une majoration de chaque terme on obtient :
$|c_{j,k}(f)|\leq\alpha 2^{-j}$.
Pour tout $j\in\mathbb{N}$, $\max\limits_{k\in\mathcal{T}_j}|c_{j,k}(f)|\leq\alpha 2^{-j}$, et puisque la série $\sum\alpha 2^{-j}$ est convergente, donc d'après la question 7.b, la suite de fonctions S_nf converge uniformément sur $[0,1]$.

(b) *On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$.*
f'' est bornée sur $[0,1]$, notons $\beta=\|f''\|_\infty$.
Comme à la question précédente, ils existent a et b dans l'intervalle $[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]$, tels que :
$f((k+\frac{1}{2})2^{-j})-f(k2^{-j})=2^{-j}f'(a)$ et
$f((k+1)2^{-j})-f((k+\frac{1}{2})2^{-j})=2^{-j}f'(b)$ et demême il existe c entre a et b tel que

$c_{j,k}(f)=\frac{1}{2}2^{-j}(a-b)f''(c)$, et puisque $|a-b|\le 2^{-j}$, alors $|c_{j,k}(f)|\le(\frac{1}{2}\beta)4^{-j}$.

9. (a) Pour $j\le n<n+1$, et $k\in\mathcal{T}_j$, la fonction $\theta_{j,k}$ est affine sur $[\ell 2^{-n-1},(\ell+1)2^{-n-1}]$ où $\ell\in\mathcal{T}_{n+1}$, et puisque S_nf est une combinaison des fonctions $\theta_{j,k}$ avec $j<n+1$ et $k\in\mathcal{T}_j$, alors S_nf est affine sur l'intervalle $[\ell 2^{-n-1},(\ell+1)2^{-n-1}]$.

   (b) Soit $\ell\in\mathcal{T}_{n+1}$;
   Cas $\ell=2\ell'$ pair, dans ce cas $\ell'\in\mathcal{T}_n$.
   $S_nf(\ell 2^{-n-1})=S_nf(\ell'2^{-n})=\displaystyle\sum_{k\in\mathcal{T}_n}c_{n,k}(f)\theta_{n,k}(\ell'2^{-n})+S_{n-1}f(\ell'2^{-n})$, par hypothèse de récurrence $S_{n-1}f(\ell 2^{-n})=f(\ell'2^{-n})=f(\ell 2^{-n-1})$, et d'autre par les fonctions $\theta_{n,k}$ avec $k\in\mathcal{T}_n$ s'annule en $\ell'2^{-n}$, alors $S_nf(\ell 2^{-n-1})=f(\ell 2^{-n-1})$.
   Cas $\ell=2\ell'+1$ impair, dans ce cas on a $\ell'\in\mathcal{T}_n$.
   De même on a $S_nf(\ell 2^{-n-1})=\displaystyle\sum_{k\in\mathcal{T}_n}c_{n,k}(f)\theta_{n,k}((\ell'+\frac{1}{2})2^{-n})+S_{n-1}f((\ell'+\frac{1}{2})2^{-n})$.
   Lorsque $k\ne\ell'$, alors $\theta_{n,k}((\ell'+\frac{1}{2})2^{-n})=0$, et donc
   $\displaystyle\sum_{k\in\mathcal{T}_n}c_{n,k}(f)\theta_{n,k}((\ell'+\frac{1}{2})2^{-n})=c_{n,\ell'}(f)\theta_{n,\ell'}((\ell'+\frac{1}{2})2^{-n})=c_{n,\ell'}(f)$.
   Puisque la fonction $S_{n-1}f$ est affine sur le segment $[\ell'2^{-n},(\ell'+1)2^{-n}]$, alors
   $S_{n-1}f((\ell'+\frac{1}{2})2^{-n})=\dfrac{S_{n-1}(\ell'2^{-n})+S_{n-1}f((\ell'+1)2^{-n})}{2}=\dfrac{f(\ell'2^{-n})+f((\ell'+1)2^{-n})}{2}$:
   En effet, si g est affine sur le segment $[a,b]$, alors $\forall x\in[a,b]$; $g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ et en particulier $g(\frac{a+b}{2})=\frac{g(a)+g(b)}{2}$.
   Il en résulte ;
   $S_nf(\ell 2^{-n-1})=c_{n,\ell'}(f)+\frac{f(\ell'2^{-n})+f((\ell'+1)2^{-n})}{2}=f((\ell'+\frac{1}{2})2^{-n})=f(\ell 2^{-n-1})$.

   (c) La récurrence aux yeux !..., il faut la démarrer (bien sur pour $n=0$).
   D'abord ; $S_0f=c_{0,0}(f)\theta_{0,0}$
   Soit $\ell\in\mathcal{T}_1$, ($\ell=0$ ou $\ell=1$), un calcul donne :
   $S_0f(0)=0=f(0)$ et $S_0f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})\theta_{0,0}(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$.

10. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$, et $x\in[0,1]$, remarquons que $[0,1]=\displaystyle\bigcup_{k=0}^{2^{n+1}-1}[k2^{-n-1},(k+1)2^{-n-1}]$, donc il existe k avec $0\le k<2^{n+1}$, tel que $x\in[k2^{-n-1},(k+1)2^{-n-1}]$, et comme S_nf est affine sur $[k2^{-n-1},(k+1)2^{-n-1}]$, alors

$$\begin{aligned}|S_nf(x)-S_nf(k2^{-n-1})| &\le |S_nf(k2^{-n-1})-S_nf((k+1)2^{-n-1})|\\ &\le |f(k2^{-n-1})-f((k+1)2^{-n-1})|\\ &\le \omega_f(2^{-n-1})\end{aligned}$$

   ($S_nf(x)$ est compris entre les deux valeurs $S_nf(k2^{-n-1})$ et $S_nf((k+1)2^{-n-1})$)
   Et d'autre part $|x-k2^{-n-1}|\le 2^{-n-1}$, donne $|f(x)-f(k2^{-n-1})|\le\omega_f(2^{-n-1})$, on en déduit alors que
   $|f(x)-S_nf(x)|\le|f(x)-f(k2^{-n-1})|+|S_n(k2^{-n-1})-S_nf(x)|\le 2\omega_f(2^{-n-1})$, il vient alors que $\|f-S_nf\|_\infty\le 2\omega_f(2^{-n-1})$, et puisque ω_f est continue en 0 et $\omega_f(0)=0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|f-S_nf\|_\infty=0$.
   $S_nf(x)$ est compris entre les deux valeurs $S_nf(k2^{-n-1})=f(k2^{-n-v})$ et
   $S_nf((k+1)2^{-n-1})=f((k+1)2^{-n-1})$, donc
   $|S_nf(x)|\le\max(|f(k2^{-n-1})|,|f((k+1)2^{-n-1})|)\le\|f\|_\infty$, et par la suite $\|S_nf\|_\infty\le\|f\|_\infty$.
   Pour $k\in\mathcal{T}_n$, on a $S_n\theta_{n,k}=\theta_{n,k}$, donc la norme subordonnée (à $\|.\|_\infty$) de S_n est égal à 1.

(b) *Soient $n \in \mathbb{N}$, et $f \in \mathcal{C}_0$.*
Rappelons ici que $c_{i,\ell}(\theta_{j,k}) = 1$ si $(i,\ell) = (j,k)$ et 0 sinon, et que les applications $c_{i,l}$ sont linéaires.

$$\begin{aligned}
S_n(S_n f) &= S_n\Big(\sum_{j=0}^{n}\sum_{k\in\mathcal{T}_j} c_{j,k}(f)\theta_{j,k}\Big)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{\ell\in\mathcal{T}_i} c_{i,\ell}\Big(\sum_{j=0}^{n}\sum_{k\in\mathcal{T}_j} c_{j,k}(f)\theta_{j,k}\Big)\theta_{i,\ell}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{\ell\in\mathcal{T}_i}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k\in\mathcal{T}_j} c_{j,k}(f)c_{i,\ell}(\theta_{j,k})\theta_{i,\ell}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{\ell\in\mathcal{T}_i} c_{i,\ell}(f)\theta_{i,\ell}\\
&= S_n f
\end{aligned}$$

11. (a) *La fonction $x \mapsto x^s$ est concave sur $\mathbb{R}_+$, pour tous $a, b \geq 0$, on a $\frac{a^s}{2} + \frac{b^s}{2} \leq (\frac{a+b}{2})^s$, et donc $a^s + b^s \leq 2^{1-s}(a+b)^s$.*

(b) *Soit $f \in \mathcal{C}_0 \cap \Gamma^s$,*
Il existe alors $M \in \mathbb{R}_+$, tel que $\forall x \in [0,1]$, $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|^s$.
$c_{j,k}(f) = f((k+\frac{1}{2})2^{-j}) - f(x_0) - \frac{1}{2}\left((f(k2^{-j}) - f(x_0)) + (f((k+1)2^{-j}) - f(x_0)\right))$.
Pour obtenir l'inégalité demandée, on commence par majorer chaque terme :

$$\begin{aligned}
|f((k+\frac{1}{2})2^{-j}) - f(x_0)| &\leq M|(k+\frac{1}{2})2^{-j} - x_0|^s\\
&\leq M(\frac{1}{2}2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|)^s\\
&\leq M(2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|)^s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(f(k2^{-j}) - f(x_0)) + (f((k+1)2^{-j}) - f(x_0))| &\leq M(|k2^{-j} - x_0|^s + |(k+1)2^{-j} - x_0|^s)\\
&\leq M2^{1-s}(|k2^{-j} - x_0| + |(k+1)2^{-j} - x_0|)^s
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est obtenue par la question précédente.
Mais $|(k+1)2^{-j} - x_0| \leq 2^{-j} + |k2^{-j} - x_0| \leq 2.2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
|(f(k2^{-j}) - f(x_0)) + (f((k+1)2^{-j}) - f(x_0))| &\leq M2^{1-s}(2.2^{-j} + 2|k2^{-j} - x_0|)^s\\
&\leq 2M(2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|)^s
\end{aligned}$$

On a alors la majoration suivante :
$|c_{j,k}(f)| \leq 2M(2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|)^s$.

Troisième partie : Minoration de l'exposant de Hölder ponctuel

12. *Pour $x \neq x_0$ on a : $2^{-n_0-1} < |x - x_0| \leq 2^{n_0}$ si, et seulement si, $n_0 \leq \log_2(|x - x_0|) < n_0 + 1$ si, et seulement si, n_0 est la partie entière de $\log_2(|x - x_0|)$, ceci donne l'existence et l'unicité de n_0.*

13. *Rappelons que si $x \in [0,1]$, et $(j,k) \in \mathcal{I}$; si $k \neq \tilde{k}_j(x)$, alors $\theta_{j,k}(x) = 0$.*
Pour $x \in [0,1]$, et $k \in \mathcal{T}_j$; si k est différent de $\tilde{k}_j(x)$ et $\tilde{k}_j(x_0)$, alors $\theta_{j,k}(x) = \theta_{j,k}(x_0) = 0$, il vient alors que : $W_j = |c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)||\theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x) - \theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x_0)| + |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}||\theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x_0) - \theta_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(x_0)|$ et par l'inégalité de la question 5.d, on obtient le résultat.

14. (a) *Il suffit de majorer les coefficients qui intervient dans l'inégalité de la question précédente :*
$|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| \leq c_1(2^{-j} + |\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0|)^s$ *et comme* $|\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0| \leq 2^{-j}$ *alors*
$|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}| \leq c_1(2^{-j} + 2^{-j})^s = c_1 2^s 2^{-js} \leq c_1 3^s 2^{-js}$, *on aussi*
$|c_{j,\tilde{k}_j(x)}| \leq c_1(2^{-j} + |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0|)^s$ *et puisque*
$|\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0| \leq |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x| + |x - x_0| \leq 2^{-j} + 2^{-n_0} \leq 2.2^{-j}$, *donc*
$(2^{-j} + |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0|)^s \leq 3^s 2^{-sj}$, *puis :*
$W_j \leq c_1 2.2^{-sj} 3^s 2^{j+1}|x - x_0| = 4c_1 3^s 2^{(1-s)j}|x - x_0|$.

(b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n_0} W_j \leq 4c_1 3^s |x - x_0| \sum_{j=0}^{n_0} 2^{(1-s)j}$ *d'autre part :*

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n_0} 2^{(1-s)j} = (2^{1-s} - 1)^{-1}(2^{(1-s)(n_0+1)} - 1) &\leq (2^{1-s} - 1)^{-1} 2^{(1-s)(n_0+1)} \\
&\leq 2.2^{-s}(2^{1-s})^{-1}(2^{-n_0})^{s-1} \\
&\leq 2.2^{-s}(2^{1-s} - 1)^{-1}|x - x_0|^{s-1}
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{j=0}^{n_0} W_j \leq 8c_1(2^{1-s} - 1)^{-1}(3/2)^2|x - x_0|^s$.

15. *pour $j \in \mathbb{N}$, on a :*
$|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| \leq c_1(2^{-j} + |\tilde{k}_j(x_0) - x_0|)^s \leq c_1(2^{-j} + 2^{-j})^s = c_1 2^{s(1-j)}$
$\displaystyle\sum_{j=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)||\theta_{j,k}(x_0)| = \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)||\theta_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(x_0)|$, *les fonctions* $\theta_{j,\tilde{k}_j(x_0)}$ *sont majorées par 1, donc*

$$\begin{aligned}
\sum_{j=n_0+1}^{+\infty} |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)||\theta_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(x_0)| &\leq c_1 \sum_{j=n_0+1} 2^{s(1-j)} \\
&\leq c_1 2^s 2^{(-n_0-1)s} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-sj} \\
&\leq c_1 2^s |x - x_0|^s (1 - 2^{-s})^{-1}
\end{aligned}$$

16. *Montrons d'abord que $\omega_f(1) \geq 1$, en effet :*
f étant continue sur le segment $[0,1]$, donc il existe $c \in [0,1]$ tel que $\|f\|_\infty = |f(c)| = 1$,de plus $|c - 0| \leq 1$, donc $1 = |f(c)| = |f(c) - f(0)| \leq \omega_f(1)$.
De ce qui précéde $2^{-n_0 s}$ est compris entre $0 = \omega_f(0)$ et $\omega_f(1)$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il exsiste $\alpha \in [0,1]$ tel que $2^{-n_0 s} = \omega_f(\alpha)$, considérons maintenant n' la partie entière de $\log_2 \alpha$, par la monotonie de ω_f , on obtient $\omega_f(2^{-n'-1}) \leq 2^{-n_0 s} \leq \omega_f(2^{-n'})$, mais la première inégalité n'est pas stricte, pour régler ce problème ; considérons $A = \{n \in \mathbb{N} \ , \ 2^{-n_0 s} \leq \omega_f(2^{-n})\}$, c'est une partie de $\mathbb{N}$, non vide (il contient n'), si cette partie n'est aps majorée, alors on peut trouver une suite d'entiers $\varphi(n)$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in A$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{-sn_0} \leq \omega_f(2^{-\varphi(n)})$, mais comme la fonction ω_f est continue en 0 et $\omega_f(0) = 0$, en passant à la limite on obtient

$2^{-n_0 s} \leq 0$ (ce qui est impossible).
La partie A est alors majorée , donc admet un plus grand élément n_1 ; $n_1 \in A$ donne $2^{-n_0 s} \leq \omega_f(2^{-n_1})$ et $n_1 + 1 \notin A$ donne $\omega_f(2^{-n_1-1}) < 2^{-n_0 s}$.
Pour l'unicité supposons l'existence d'un autre entier n_2 tel que $n_2 \neq n_1$, par définition de A l'entier n_2 est un élément de A donc $n_2 < n_1$, on a aussi $n_2 + 1 \leq n_1$, donc $\omega_f(2^{-n_2-1}) < 2^{-n_0 s} \leq \omega_f(2^{-n_1}) \leq \omega_f(2^{-n_2-1})$, et on a alors une contradiction.

17. Soient $t \in [0,]$ et $k \in \mathcal{T}_{n+1}$ tel que $t \in [k2^{-n-1}, (k+1)2^{-n-1}]$

$$f(t) - S_n f(t) = \Big(f(t) - S_n f(k2^{-n-1})\Big) + \Big(S_n f(k2^{-n-1}) - S_n f(t)\Big)$$

Et comme la fonction $S_n f$ est affine sur le segment $[k2^{-n-1}, (k+1)2^{-n-1}]$ alors elle est monotone sur cet segment, donc $S_n f(t)$ est compris entre les deux valeurs $S_n f(k2^{-n-1})$ et $S_n f((k+1)2^{-n-1})$ on en déduit alors que
$|S_n f(t) - S_n f(k2^{-n-1}) \leq |S_n f(k2^{-n-1}) - f(k2^{-n-1})|$, donc
$|f(t) - S_n f(t)| \leq |f(t) - f(k2^{-n-1})| + |f(k2^{-n-1}) - f((k+1)2^{-n-1})|$ et puisque
$|t - k2^{-n-1}| \leq 2^{-n-1} \leq 2^{-n_1-1}$ et $|(k+1)2^{-n-1} - k2^{-n-1}| \leq 2^{-n-1} \leq 2^{-n_1-1}$
alors $|f(t) - f(k2^{-n-1})| \leq \omega_f(2^{-n_1-1}) \leq 2^{-n_0 s}$ et
$|f((k+1)2^{-n-1}) - f(k2^{-n-1})| \leq \omega_f(2^{-n_1-1}) \leq 2^{-n_0 s}$, on obtient alors
$|f(t) - S_n f(t)| \leq 2.2^{-n_0 s} = 2^{s+1} 2^{(-n_0-1)s} \leq 2^{s+1}|x - x_0|$, et c'est bien que
$\|f - S_n f\|_\infty \leq 2^{s+1}|x - x_0|^s$.

18. (a) Pour j entre $n_0 + 1$ et n_1, on a
Comme à la question 15, $|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)| \leq c_1 3^s |x - x_0|^s$, donc
$$\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)||\theta_{j,k}(x)| = \sum_{j=n_0+1}^{n_1} |c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)||\theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x)| \leq c_1 3^s (n_1 - n0)|x - x_0|^s.$$
(b) On a $\omega_f(2^{-n_1}) \leq c_4(N)(1 + |\log_2(2^{-n_1})|)^{-N} = c_4(N)(1 + n_1)^{-N}$ et par suite
$(1 + n_1)^N \leq \dfrac{c_4(N)}{\omega_f(2^{-n_1})}$ d'où :
$n_1 - n_0 \leq n_1 + 1 \leq \left(\dfrac{c_4(N)}{\omega_f(2^{-n_1})}\right)^{\frac{1}{N}}$.
Par définition de n_1 on a $\dfrac{1}{\omega_f(2^{-n_1})} \leq 2^{n_0 s}$ et donc $n_1 + 1 \leq (c_4(N))^{\frac{1}{N}} 2^{\frac{n_0 s}{N}}$ or $2^{n_0 s} \leq |x - x_0|^{-s}$, alors $(n - n_0)|x - x_0|^s \leq (c_4(N))^{\frac{1}{N}} |x - x_0|^{(1 - \frac{1}{N})s}$, on utilise la majoration de la question 18.a on obtient le résultat.

19. On fixe un entier $N \in \mathbb{N}$.
<u>Cas $n_0 < n_1$:</u>

Pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = S_{n_0} f(t) + (S_{n_1} f(t) - S_{n_0} f(t)) + (f(t) - S_{n_1} f(t))$.
Nous allors majorer chaque terme :
$$|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| \leq \sum_{j=0}^{n_0} W_j \leq c_2 |x - x_0|^s \leq c_2 |x - x_0|^{(1 - \frac{1}{N})s}.$$

$$\begin{aligned}
|(S_{n_1}f(x) - S_{n_0}f(x)) &- (S_{n_1}f(x_0) - S_{n_0}f(x_0))| \\
&\leq \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(x)||\theta_{j,k}(x)| + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)||\theta_{j,k}(x_0)| \\
&\leq \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(x)||\theta_{j,k}(x)| + \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)||\theta_{j,k}(x_0)| \\
&\leq c_5(N)|x-x_0|^{(1-\frac{1}{N})s} + c_3|x-x_0|^S \\
&\leq (c_5(N)+c_3)|x-x_0|^{(1-\frac{1}{N})s}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(f(x) - S_{n_1}f(x)) - (f(x_0) - S_{n_1}f(x_0))| &\leq 2\|f - S_{n_1}f\|_\infty \\
&\leq 2^{s+2}|x-x_0|^s \\
&\leq 2^{s+2}|x-x_0|^{(1-\frac{1}{N})s}
\end{aligned}$$

Si on pose $M_1(N) = \max(c_2, c_5(N)+c_3, 2^{2+s})$, *alors dans ce cas ;*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M_1(N)|x-x_0|^{(1-\frac{1}{N})s}$$

Cas $n_0 \geq n_1$ *:*

Pour tout $t \in [0,1]$ *on a* $f(t) = f(t) - S_{n_0}f(t) + S_{n_0}f(t)$ *et on a les majorations suivantes :*
$|S_{n_0}f(x) - S_{n_0}f(x_0)| \leq c_2|x-x_0|^s \leq c_2||^{(1-\frac{1}{N})s}$ *et puisque* $n_0 \geq n_1$ *alors*

$$\begin{aligned}
|(f(x) - S_{n_0}f(x)) - (f(x_0) - S_{n_0}f(x_0))| &\leq 2\|f - S_{n_0}f\|_\infty \\
&\leq 2^{2+s}|x-x_0|^s \\
&\leq 2^{s+2}|x-x_0|^{(1-\frac{1}{N})s}
\end{aligned}$$

Si on pose $M_2 = \max(2^{s+2}, c_2)$, *alors dans ce cas on a :*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M_2|x-x_0|^{(1-\frac{1}{N})s}$$

Posons maintenant $M = \max(M_1(N), M_2)$, *puisque* N *ne dépend pas* x, *alors* $\forall x \in [0,1]$, $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x-x_0|^{(1-\frac{1}{N})s}$, *on en déduit alors que pour tout* $N \in \mathbb{N}^*$, $f \in \Gamma^{(1-\frac{1}{N})s}$, *en particulier , pour tout* $N \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_f(x_0) \geq (1-\frac{1}{N})s$, *par un passage à la limite quand* N *tend vers* $+\infty$, *il vent que* $\alpha_f(x_0) \geq s$.

النهاية *FIN END*