CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES X B MP 2013

Exposant de Hölder ponctuel d'une fonction continue

Première partie : définition de l'exposant de Hölder ponctuel

Note importante : dans tout ce corrigé, on utilisera la notation suivante pour $x_0 \in [0,1]$, $s \in [0,1[$ et $f \in \Gamma^s(x_0)$:

$$M_{s,x_0}(f) = \sup_{x\in[0,1]\setminus\{x_0\}} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s}.$$

Lorsque s et x_0 seront fixés par le contexte et qu'aucune ambiguïté ne sera possible, on notera simplement

$$M(f) = M_{s,x_0}(f).$$

1a. Soient $x_0 \in [0,1]$ et $s \in [0,1[$.

$*$ Par défintiion, $\Gamma^s(x_0) \subset \mathcal{C}$. La fonction nulle sur $[0,1]$ est dans $\Gamma^s(x_0)$, qui est donc non-vide. En outre, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, tout $(f,g) \in \Gamma^s(x_0)$, et tout $x \in [0,1] \setminus \{x_0\}$, on a par inégalité triangulaire

$$|(\lambda f+g)(x) - (\lambda f+g)(x_0)| = |\lambda(f - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))| \leq |\lambda|\,|f(x)-f(x_0)| + |g(x)-g(x_0)|$$

si bien que

$$\frac{|(\lambda f+g)(x) - (\lambda f+g)(x_0)|}{|x-x_0|^s} \leq |\lambda|\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s} + \frac{|g(x)-g(x_0)|}{|x-x_0|^s} \leq |\lambda| M(f) + M(g).$$

L'ensemble $\left\{\frac{|(\lambda f+g)(x) - (\lambda f+g)(x_0)|}{|x-x_0|^s}\middle| x \in [0,1]\setminus\{x_0\}\right\} \subset \mathbf{R}$ est donc majoré (et évidemment non-vide) et possède donc une borne supérieure. Ceci montre que $\lambda f + g \in \Gamma^s(x_0)$ et donc que $\Gamma^s(x_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$.

$*$ Soient maintenant deux réels s_1 et s_2 vérifiant $0 \leq s_1 \leq s_2 < 1$, et soit $f \in \Gamma^{s_2}(x_0)$. Pour tout $x \in [0,1]\setminus\{x_0\}$, on a $|x-x_0| \leq 1$ d'où $|x-x_0|^{s_2} \leq |x-x_0|^{s_1}$ et donc

$$\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{s_1}} \leq \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{s_2}} \leq M_{s_2,x_0}(f).$$

On en déduit que l'ensemble $\left\{\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{s_1}}\middle| x \in [0,1]\setminus\{x_0\}\right\}$ est majoré et donc que $f \in \Gamma^{s_1}(x_0)$, si bien que $\Gamma^{s_2}(x_0) \subset \Gamma^{s_1}(x_0)$.

$*$ Montrons enfin que $\Gamma^0(x_0) = \mathcal{C}$. On a bien sûr l'inclusion $\Gamma^0(x_0) \subset \mathcal{C}$. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{C}$. f étant continue sur le compact $[0,1]$ est bornée : soit $K > 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x)| \leq K$. On a alors pour $x \in [0,1]\setminus\{x_0\}$

$$\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^0} = |f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)| + |f(x_0)| \leq 2K.$$

On en conclut que l'ensemble $\left\{\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^0}\middle| x \in [0,1]\setminus\{x_0\}\right\}$ est majoré si bien que $f \in \Gamma^0(x_0)$, et donc finalement $\Gamma^0(x_0) = \mathcal{C}$.

1b. Soit $f \in \mathcal{C}$ dérivable en x_0, et φ définie sur $[0,1]$ par $\varphi(x) = \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|$ si $x \neq x_0$ et $\varphi(x_0) = f'(x_0)$. φ est continue sur $[0,1]\setminus\{x_0\}$ comme quotient de composées de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est en outre continue en x_0 d'après l'hypothèse de dérivabilité de f. Elle est donc bornée puisque $[0,1]$ est compact. Soit K un majorant de φ.

Pour tout $s \in [0,1[$ et tout $x \in [0,1] \setminus \{x_0\}$, $|x-x_0| \leq 1$ d'où $|x-x_0| \leq |x-x_0|^s$ et

$$\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s} \leq \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} = \varphi(x) \leq K$$

et $f \in \Gamma^s(x_0)$.

1c. Soient $x_0 \in]0,1[$ et f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = (x-x_0)\ln|x-x_0|$ si $x \neq x_0$ et $f(x_0) = 0$. f est continue sur $[0,1] \setminus \{x_0\}$ comme produit de composées de fonctions continues et en x_0 par croissances comparées. Pour tout $s \in [0,1[$, on a de plus

$$\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s} = |x-x_0|^{1-s}\Big|\ln|x-x_0|\Big|.$$

De même que f, $x \mapsto |x-x_0|^{1-s}\Big|\ln|x-x_0|\Big|$ prolongée par 0 en x_0 est continue sur $[0,1]$ donc majorée, ce qui montre que $f \in \Gamma^s(x_0)$.

f est en outre dérivable sur $[0,x_0[$ et sur $]x_0,1]$ et pour tout x dans l'un de ces intervalles

$$f'(x) = 1 + \ln|x-x_0|.$$

$f'(x)$ a donc pour limite $-\infty$ en x_0 à gauche ou à droite si bien que f n'est pas dérivable en x_0 d'après le corollaire du théorème des accroissements finis sur les limites de dérivées. Cette fonction constitue bien l'exemple recherché.

2. Soit $s \in [0,1[$. Pour tout $x \in [0,1]$, $x \neq \dfrac{1}{2}$, on a

$$\frac{\left|p(x)-p\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{\left|x-\frac{1}{2}\right|^s} = \frac{2^s\sqrt{|(1-2x)(1+2x)|}}{|1-2x|^s} = 2^s|1+2x|^{1/2}|1-2x|^{1/2-s}.$$

Cette quantité est bornée si et seulement $s \leq \dfrac{1}{2}$. On en déduit que $p \in \Gamma^s\left(\frac{1}{2}\right)$ si et seulement si $s \leq \dfrac{1}{2}$, si bien que $\alpha_p\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

3a. Soit $(h,h') \in [0,1]^2$ vérifiant $h \leq h'$. On a l'inclusion évidente

$$\{|f(x)-f(y)|\,|x,y \in [0,1] \text{ et } |x-y| \leq h\} \subset \{|f(x)-f(y)|\,|x,y \in [0,1] \text{ et } |x-y| \leq h'\}$$

si bien que

$$\omega_f(h) = \sup\{|f(x)-f(y)|\,|x,y \in [0,1] \text{ et } |x-y| \leq h\} \leq \sup\{|f(x)-f(y)|\,|x,y \in [0,1] \text{ et } |x-y| \leq h'\} = \omega_f(h')$$

et ω_f est croissante sur $[0,1]$.

On a immédiatement $\{|f(x)-f(y)|\,|x,y \in [0,1] \text{ et } |x-y| \leq 0\} = \{0\}$ si bien que $\omega_f(0) = 0$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$. f étant continue sur le compact $[0,1]$ est uniformément continue : il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, $|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. Si $h \in [0,1]$ vérifie $h \leq \eta$, ε est donc un majorant de $\{|f(x)-f(y)|\,|x,y \in [0,1] \text{ et } |x-y| \leq h\}$ si bien que $\omega_f(h) \leq \varepsilon$.

On en déduit que ω_f est bien continue en 0.

3b. Soit $(h,h') \in [0,1]^2$ vérifiant $h \leq h'$, et soit $(x,y) \in [0,1]^2$ tel que $|x-y| \leq h'$. Pour fixer les idées, supposons $x \leq y$.

$*$ Si $|x-y| \leq h$, alors $|f(x)-f(y)| \leq \omega_f(h) \leq \omega_f(h) + \omega_f(h'-h)$.

$*$ Si $h < |x-y| = y-x \leq h'$, alors $0 \leq y-(x+h) \leq h'-h$ si bien que

$$|f(x)-f(y)| = |f(x)-f(x+h)+f(x+h)-f(y)| \leq |f(x)-f(x+h)|+|f(x+h)-f(y)| \leq \omega_f(h)+\omega_f(h'-h).$$

On a donc $|f(x)-f(y)| \leq \omega_f(h)+\omega_f(h'-h)$ dans tous les cas d'où $\omega_f(h') \leq \omega_f(h)+\omega_f(h'-h)$.

3c. Soit $(h,h') \in [0,1]^2$ avec $h \leq h'$. D'après les deux questions précédentes

$$\omega_f(h) \leq \omega_f(h') \leq \omega_f(h)+\omega_f(h'-h).$$

Comme ω_f est continue en 0, on a $\lim\limits_{h'\to h} \omega_h(h'-h) = 0$, et par le théorème d'encadrement, il vient

$$\lim_{h'\to h} \omega_f(h') = \omega_f(h)$$

ce qui prouve que ω_f est continue en h pour tout $h \in [0,1]$, c'est-à-dire continue sur $[0,1]$.

4a. Notons K un majorant de $h \mapsto \dfrac{\omega_f(h)}{h^s}$ sur $]0,1]$. Soient $x_0 \in [0,1]$ et $x \in [0,1] \setminus \{x_0\}$. Alors

$$\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s} \leq \frac{\omega_f(|x-x_0|)}{|x-x_0|^s} \leq K$$

si bien que $f \in \Gamma^s(x_0)$.

4b. Notons d'abord que q est continue sur $]0,1]$ par les théorèmes usuels et en 0 grâce à l'inégalité immédiate $|q(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in [0,1]$. De même, q est dérivable sur $]0,1]$ d'où $q \in \Gamma^s(x_0)$ pour tout $x_0 \in]0,1[$ et tout $s \in [0,1[$. Le même argument peut s'étendre facilement en 1, si bien que $q \in \Gamma^s(1)$ pour tout $s \in [0,1[$.

Enfin, on a pour tout $x \in]0,1]$ et tout $s \in [0,1[$

$$\frac{|q(x)-q(0)|}{|x|^s} = |x|^{1-s}\left|\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \leq 1$$

si bien que $q \in \Gamma^s(0)$. Ceci prouve que $\alpha_q(x_0) = 1$ pour tout $x_0 \in [0,1]$.

Soit maintenant $h \in]0,1]$ et $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $2^{-n} \leq h$. Alors $2^{-n} - 2^{-(n+1)} = 2^{-(n+1)} \leq h$ d'où

$$\omega_q(h) \geq |q(2^{-n}) - q(2^{-(n+1)})| = |2^{-n}\cos(2^n\pi) - 2^{-(n+1)}\cos(2^{n+1}\pi)| = 2^{-(n+1)}.$$

Il vient

$$\frac{\omega_q(h)}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{h}} \geq \frac{1}{2^{n+1}2^{-n/2}} = 2^{\frac{n}{2}-1} \geq \frac{1}{2}$$

ce qui montre que $\dfrac{\omega_q(h)}{\sqrt{h}}$ ne converge pas vers 0 quand h tend vers 0.

Remarque : ce raisonnement reste valable pour toute puissance $s \in [0,1[$. Notons que comme on peut prendre $n = E\left(\log_2 \dfrac{1}{h}\right)+1$ qui tend vers l'infini quand h tend vers 0, on a en fait prouvé que $\dfrac{\omega_q(h)}{h^s}$ n'est borné pour aucun $s \in [0,1[$ et donc que la réciproque du résultat de la question 4a est fausse en général.

Deuxième partie : le système de Schauder

5a. Soient $j \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathcal{T}_{j+1}$. Si k est pair, on pose $k' = \dfrac{k}{2}$. On a alors

$$k' < \frac{2^{j+1}}{2} = 2^j$$

d'où $k' \in \mathcal{T}_j$ et
$$k2^{-j-1} = k'2^{-j} \text{ et } (k+1)2^{-j-1} = \left(k' + \frac{1}{2}\right)2^{-j} \leq (k+1)2^{-j}$$
d'où $[k2^{-j-1}, (k+1)2^{-j-1}] \subset [k'2^{-j}, (k'+1)2^{-j}]$.

Si k est impair, on a de même
$$k' = \frac{k-1}{2} < \frac{2^{j+1}-1}{2} < 2^j$$
d'où $k' \in \mathcal{T}_j$ et
$$k2^{-j-1} = \left(k' + \frac{1}{2}\right)2^{-j} \geq k'2^{-j} \text{ et } (k+1)2^{-j-1} = (k'+1)2^{-j}$$
d'où $[k2^{-j-1}, (k+1)2^{-j-1}] \subset [k'2^{-j}, (k'+1)2^{-j}]$ de même. On peut donc choisir en toute généralité $k' = E\left(\frac{k}{2}\right)$ où E désigne la fonction partie entière, ce qui montre l'existence de k'.

Inversement, si $k'' \in \mathcal{T}_j$ vérifie $[k2^{-j-1}, (k+1)2^{-j-1}] \subset [k''2^{-j}, (k''+1)2^{-j}]$, on doit avoir
$$k2^{-j-1} \geq k''2^{-j} \iff \frac{k}{2} \geq k''$$
et
$$(k+1)2^{-j-1} \leq (k''+1)2^{-j} \iff \frac{k}{2} \leq k'' + \frac{1}{2} < k'' + 1$$
ce qui montre que $k'' = E\left(\frac{k}{2}\right)$ et l'unicité voulue.

5b. Soient $j \in \mathbf{N}$, $k \in \mathcal{T}_j$, $\ell \in \mathcal{T}_{j+1}$. On a $\theta_{j,k}(\ell 2^{-j-1}) \neq 0$ seulement si
$$k2^{-j} \leq \ell 2^{-j-1} \leq (k+1)2^{-j} \iff 2k \leq \ell \leq 2k+2.$$
Or on a d'une part
$$\theta_{j,k}(2k2^{-j-1}) = 1 - |2^{j+1}2k2^{-j-1} - 2k - 1| = 0$$
d'autre part
$$\theta_{j,k}((2k+2)2^{-j-1}) = 1 - |2^{j+1}(2k+2)2^{-j-1} - 2k - 1| = 0$$
et enfin
$$\theta_{j,k}((2k+1)2^{-j-1}) = 1 - |2^{j+1}(2k+1)2^{-j-1} - 2k - 1| = 1.$$
On en conclut que $\theta_{j,k}(\ell 2^{-j-1}) = 1$ si $\ell = 2k+1$ et $\theta_{j,k}(\ell 2^{-j-1}) = 0$ sinon.

5c. Soit $(j,k) \in \mathcal{I}$.

$*$ Par définition, $\theta_{j,k}$ est continue sur $]k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[$ et sur $[0,1] \setminus [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$. De plus, il est clair que
$$\lim_{x \to k2^{-j}, x < k2^{-j}} \theta_{j,k}(x) = 0 = \lim_{x \to k2^{-j}, x > k2^{-j}} \theta_{j,k}(x)$$
et de même en $(k+1)2^{-j}$ (pour les cas $k = 0$ et $k = 2^j - 1$, on ne regardera qu'un seul des deux points). On en déduit que $\theta_{j,k}$ est continue sur $[0,1]$.

$*$ En itérant le raisonnement de la question précédente, on constate que tout intervalle $[\ell 2^{-n}, (\ell+1)2^{-n}]$ où $n > j$ et $\ell \in \mathcal{T}_n$ est inclus, soit dans $\left[k2^{-j}, \left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right]$, soit dans $\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}, (k+1)2^{-j}\right]$. La restriction de $\theta_{j,k}$ à ces deux intervalles étant affine d'après sa définition, on en déduit *a fortiori* qu'elle l'est sur $[\ell 2^{-n}, (\ell+1)2^{-n}]$.

5d. Soient $(j,k) \in \mathcal{I}$ et $(x,y) \in [0,1]^2$.

$*$ Si $(x,y) \in ([0,1] \setminus [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}])^2$, on a
$$|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(y)| = 0 \leq 2^{j+1}|x-y|.$$

$*$ Si $(x,y)\in[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]^2$, on a par la seconde inégalité triangulaire

$$|\theta_{j,k}(x)-\theta_{j,k}(y)|=|2^{j+1}y-2k-1|-|2^{j+1}x-2k-1|\leq|2^{j+1}y-2k-1-(2^{j+1}x-2k-1)|=2^{j+1}|x-y|.$$

$*$ Si $x\in[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]$ et $y\in[0,1]\setminus[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]$, on a soit $y<k2^{-j}$, soit $y>(k+1)2^{-j}$. Dans le premier cas, il vient avec l'étude du cas précédent

$$|\theta_{j,k}(x)-\theta_{j,k}(y)|=\theta_{j,k}(x)=\left|\theta_{j,k}(x)-\theta_{j,k}(k2^{-j})\right|\leq 2^{j+1}|x-k2^{-j}|\leq 2^{j+1}|x-y|.$$

Le second cas se traite de même.

On a prouvé l'inégalité voulue dans tous les cas.

6. Soit $\varepsilon>0$. f étant continue sur le compact $[0,1]$ est uniformément continue : il existe $\eta>0$ tel que pour tout $(x,y)\in[0,1]^2$, $|x-y|\leq\eta\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$. Soit alors $j_0\in\mathbf{N}$ tel que $j\geq j_0\Rightarrow 2^{-j}<\eta$. Alors pour $j\geq j_0$

$$\begin{aligned}|c_{j,k}(f)|&=\left|f\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right)-\frac{f(k2^{-j})+f((k+1)2^{-j})}{2}\right|\\&\leq\frac{1}{2}\left|f\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right)-f(k2^{-j})\right|+\frac{1}{2}\left|f\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right)-f((k+1)2^{-j})\right|\leq\varepsilon.\end{aligned}$$

On a donc

$$j\geq j_0\Rightarrow\max_{k\in\mathcal{T}_j}|c_{j,k}(f)|\leq\varepsilon$$

ce qui montre bien $\lim\limits_{j\to+\infty}\max\limits_{k\in\mathcal{T}_j}|c_{j,k}(f)|=0$.

7a. Soient $(j,k)\in\mathcal{I}$, $(i,\ell)\in\mathcal{I}$. On a

$$\begin{aligned}c_{j,k}(\theta_{i,\ell})&=\theta_{i,\ell}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right)-\frac{\theta_{i,\ell}(k2^{-j})+\theta_{i,\ell}((k+1)2^{-j})}{2}\\&=\theta_{i,\ell}((2k+1)2^{-j-1})-\frac{\theta_{i,\ell}(k2^{-j})+\theta_{i,\ell}((k+1)2^{-j})}{2}.\end{aligned}$$

$*$ Supposons $i>j$. On a

$$\ell 2^{-i}\leq k2^{-j}\leq(\ell+1)2^{-i}\iff\ell\leq k2^{i-j}\leq\ell+1$$

ce qui impose $\ell=k2^{i-j}$ ou $\ell+1=k2^{i-j}$. Dans le premier cas, on a $\ell 2^{-i}=k2^{-j}$ et $(\ell+1)2^{-i}=k2^{-j}+2^{-i}\leq k2^{-j}+2^{-j-1}=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)2^{-j}$ si bien que

$$\theta_{i,\ell}(k2^{-j})=\theta_{i,\ell}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right)=\theta_{i,\ell}((k+1)2^{-j})=0.$$

On obtient de même $c_{j,k}(\theta_{i,\ell})=0$ si $\ell+1=k2^{i-j}$.

Par un raisonnement analogue, on constate dans tous les cas où $i>j$ que les valeurs de $k2^{-j}$, $\left(k+\dfrac{1}{2}\right)2^{-j}$ et $(k+1)2^{-j}$ sont soit à l'extérieur, soit à l'une des extrémités de l'intervalle $[\ell 2^{-i},(\ell+1)2^{-i}]$ et donc que $\theta_{i,\ell}$ s'annule en ces trois points, si bien que $c_{j,k}(\theta_{i,\ell})=0$.

$*$ Supposons maintenant $i<j$. On sait alors d'après la question 5c que $\theta_{i,\ell}$ est affine sur $[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]$. On en déduit directement que la valeur de $\theta_{i,\ell}$ au milieu de cet intervalle est égale à la moyenne de ses valeurs aux extrémités, c'est-à-dire que $c_{j,k}(\theta_{i,\ell})=0$.

$*$ On suppose enfin que $i=j$. On a alors d'après la question 5b

$$c_{j,k}(\theta_{j,\ell})=\theta_{j,\ell}((2k+1)2^{-j-1})-\frac{\theta_{j,\ell}(2k2^{-j-1})+\theta_{j,\ell}((2k+2)2^{-j-1})}{2}=\begin{cases}1\text{ si }\ell=2k+1\\0\text{ sinon.}\end{cases}$$

On en conclut finalement que

$$c_{j,k}(\theta_{i,\ell}) = \delta_{i,j}\delta_{k,l}$$

où δ est le symbole de Kronecker.

7b. $*$ Notons que $\|\theta_{j,k}\|_\infty = 1$ pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$. Soit $x \in [0,1]$ et $j \in \mathbf{N}$. On a alors par définition $x \in [\tilde{k}_j(x)2^{-j}, (\tilde{k}_j(x)+1)2^{-j}]$, si bien que

$$f_j^a(x) = \sum_{k \in \mathcal{T}_j} a_{j,k}\theta_{j,k}(x) = a_{j,\tilde{k}_j(x)}\theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x)$$

les autres termes de la somme étant nuls. Il vient

$$|f_j^a(x)| = |a_{j,\tilde{k}_j(x)}\theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x)| \leq b_j.$$

La série $\sum b_j$ étant convergente, cette majoration uniforme en x montre la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_j^a$ sur $[0,1]$, donc sa convergence uniforme. On note $f^a = \sum_{j=0}^{+\infty} f_j^a$.

$*$ Pour tout $j \in \mathbf{N}$, $f_j^a \in \mathcal{C}$ puisqu'il s'agit d'une combinaison linéaire de fonctions continues. La convergence uniforme sur $[0,1]$ montre alors que $f^a \in \mathcal{C}$.

$*$ Pour tout $j \in \mathbf{N}$, $f_j^a(0) = f_j^a(1) = 0$ par définition des $\theta_{j,k}$. La convergence uniforme entraînant la convergence simple, on a donc $f^a(0) = f^a(1) = 0$ et $f \in \mathcal{C}_0$.

$*$ Il est clair que $f \mapsto c_{j,k}(f)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}$ pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$. En outre, on a pour tout $f \in \mathcal{C}$ la majoration

$$|c_{j,k}(f)| \leq 2\|f\|_\infty$$

ce qui montre qu'elle est continue sur $\mathcal{C}$. On a donc

$$c_{j,k}(f^a) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} c_{j,k}(f_i^a).$$

Or, la question précédente fournit pour tout $i \in \mathbf{N}$

$$c_{j,k}(f_i^a) = \sum_{k \in \mathcal{T}_j} a_{i,k}c_{j,k}(\theta_{i,k}) = \delta_{i,j}a_{j,k}$$

d'où finalement

$$c_{j,k}(f^a) = a_{j,k}$$

ce qu'on voulait.

8a. f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, f' est continue donc bornée sur le compact $[0,1]$ et l'inégalité des accroissements finis montre alors que f est lipschitzienne de constante de Lipschitz $M = \|f'\|_\infty$. Il vient

$$\begin{aligned}
|c_{j,k}(f)| &\leq \frac{1}{2}\left|f\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - f(k2^{-j})\right| + \frac{1}{2}\left|f\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - f((k+1)2^{-j})\right| \\
&\leq \frac{M}{2}\left|\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j} - k2^{-j}\right| + \frac{M}{2}\left|\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j} - (k+1)2^{-j}\right| = M2^{-j-1} \leq M2^{-j}
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

On en déduit que pour tout $j \in \mathbf{N}$, $b_j = \max_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \leq M2^{-j}$. On a donc la convergence de $\sum b_j$ d'où la convergence normale donc uniforme de $S_n f$ sur $[0,1]$ par la question précédente.

8b. De même que dans la question précédente, on note $M' = \|f''\|_\infty$. f' est alors M'-lipschitzienne sur $[0,1]$. Soit $(j,k) \in \mathcal{I}$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $d_{j,k} \in \left]k2^{-j}, \left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right[$ tel que

$$f\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - f(k2^{-j}) = 2^{-j-1}f'(d_{j,k})$$

et $d'_{j,k} \in \left]\left(k+\dfrac{1}{2}\right)2^{-j}, (k+1)2^{-j}\right[$ tel que

$$f((k+1)2^{-j}) - f\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) = 2^{-j-1}f'(d'_{j,k}).$$

On a alors

$$\begin{aligned}
|c_{j,k}(f)| &= \frac{1}{2}\left|f\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - f(k2^{-j}) + f\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - f((k+1)2^{-j})\right| \\
&= \frac{1}{2}|2^{-j-1}f'(d_{j,k}) - 2^{-j-1}f'(d'_{j,k})| \\
&\leq \frac{M'2^{-j-1}}{2}|d_{j,k} - d'_{j,k}| \leq \frac{M'2^{-j-1}}{2}2^{-j} \leq M'4^{-j}
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

9a. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$. D'après la question 5c, la restriction de $S_n f$ à $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$ est une combinaison linéaire de fonctions affines sur cet intervalle et est donc également affine.

9b. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $\ell \in \mathcal{T}_n$, $(S_{n-1}f)(\ell 2^{-n}) = f(\ell 2^{-n})$.

$*$ D'après la question précédente, $S_{n-1}f$ est affine sur $[\ell 2^{-n}, (\ell+1)2^{-n}]$ pour tout $\ell \in \mathcal{T}_n$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
S_{n-1}f\left(\frac{2\ell+1}{2}2^{-n}\right) &= S_{n-1}f\left(\frac{\ell 2^{-n} + (\ell+1)2^{-n}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}[S_{n-1}f(\ell 2^{-n}) + S_{n-1}f((\ell+1)2^{-n})] \\
&= \frac{1}{2}[f(\ell 2^{-n}) + f((\ell+1)2^{-n})].
\end{aligned}$$

Soit maintenant $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$.

$*$ On suppose que ℓ est pair et l'on pose $\ell' = \dfrac{\ell}{2}$. On a alors $\ell' \in \mathcal{T}_n$. De plus, d'après la question 5b, $\theta_{n,k}(\ell 2^{-n-1}) = 0$ pour tout $k \in \mathcal{T}_n$ puisque ℓ étant pair est différent de $2k+1$. D'après notre hypothèse concernant les valeurs de $S_n f$ sur $\mathcal{T}_n 2^{-n}$, il vient alors

$$\begin{aligned}
(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k\in\mathcal{T}_j} c_{j,k}(f)\theta_{j,k}(\ell 2^{-n-1}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k\in\mathcal{T}_j} c_{j,k}(f)\theta_{j,k}(\ell' 2^{-n}) + \sum_{k\in\mathcal{T}_n} c_{n,k}(f)\theta_{n,k}(\ell 2^{-n-1}) \\
&= S_{n-1}f(\ell' 2^{-n}) \\
&= f(\ell' 2^{-n}) = f(\ell 2^{-n-1})
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

$*$ On suppose maintenant que ℓ est impair et l'on pose $\ell' = \dfrac{\ell-1}{2}$, si bien que $\ell' \in \mathcal{T}_n$. D'après la question 5b, $\theta_{n,k}(\ell 2^{-n-1}) = \delta_{\ell,2k+1} = \delta_{\ell',k}$ pour tout $k \in \mathcal{T}_n$. Il vient de même que ci-dessus en utilisant le calcul effectué en début de question

$$\begin{aligned}
(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) &= S_{n-1}f\left(\frac{2\ell'+1}{2}2^{-n}\right) + c_{n,\ell'}(f) \\
&= \frac{1}{2}[f(\ell' 2^{-n}) + f((\ell'+1)2^{-n})] + f\left(\frac{2\ell'+1}{2}2^{-n}\right) - \frac{1}{2}[f(\ell' 2^{-n}) + f((\ell'+1)2^{-n})] \\
&= f\left(\frac{2\ell'+1}{2}2^{-n}\right) = f(\ell 2^{-n-1})
\end{aligned}$$

ce qui montre dans ce cas également l'égalité attendue.

9c. Par définition, on a pour tout $\ell \in \mathcal{T}_1 = \{0,1\}$ compte tenu de $f(0) = f(1) = 0$

$$S_0 f\left(\frac{\ell}{2}\right) = c_{0,0}(f)\theta_{0,0}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(f(0)+f(1))\right]\theta_{0,0}\left(\frac{\ell}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)\theta_{0,0}\left(\frac{\ell}{2}\right).$$

Si $\ell = 0$, il vient

$$S_0 f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right)\theta_{0,0}(0) = 0 = f(0)$$

et si $\ell = 1$

$$S_0 f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)\theta_{0,0}\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

La propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par « pour tout $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$, $(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$ » est donc initialisée pour $n = 0$ et héréditaire d'après la question précédente. D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

10a. Soit $f \in \mathcal{C}_0$ et soit $\varepsilon > 0$. f étant continue sur $[0,1]$ est uniformément continue : il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, $|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Soit alors $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow 2^{-n-1} \leq \eta$. Soit $x \in [0,1]$, on pose dans la suite $\ell = \tilde{k}_{n+1}(x)$. Alors pour $n \geq n_0$, on a par définition $\ell 2^{-n-1} \leq x < (\ell+1)2^{-n-1}$ d'où

$$\begin{aligned}|f(x) - S_n f(x)| &\leq |f(x) - f(\ell 2^{-n-1})| + |f(\ell 2^{-n-1}) - S_n f(\ell 2^{-n-1})| + |S_n f(\ell 2^{-n-1}) - S_n f(x)| \\ &\leq \varepsilon + |S_n f(\ell 2^{-n-1}) - S_n f(x)|.\end{aligned}$$

Comme $S_n f$ est affine sur $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$, elle est en particulier monotone sur cet intervalle si bien que

$$|S_n f(\ell 2^{-n-1}) - S_n f(x)| \leq |S_n f(\ell 2^{-n-1}) - S_n f((\ell+1)2^{-n-1})| = |f(\ell 2^{-n-1}) - f((\ell+1)2^{-n-1})| \leq \varepsilon.$$

On en conclut que si $n \geq n_0$, on a

$$|f(x) - S_n f(x)| \leq 2\varepsilon$$

pour tout $x \in [0,1]$ et donc $\|f - S_n f\|_\infty \leq 2\varepsilon$. On en déduit bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - S_n f\|_\infty = 0$.

10b. On utilise les trois faits suivants pour toute fonction continue affine par morceaux h sur un segment $[a,b]$ à valeurs réelles, avec σ subdivision de $[a,b]$ subordonnée à h.

$*$ Si H est une autre fonction continue affine par morceaux, à laquelle σ est également subordonnée et qui coïncide avec h sur les points de σ, alors $h = H$. Ceci est dû au fait qu'une application affine sur un intervalle est entièrement déterminée par ses valeurs en deux points distincts de cet intervalle.

$*$ $|h|$ est également continue affine par morceaux sur $[a,b]$, et on obtient une subdvision σ_1 de $[a,b]$ subordonnée à $|h|$ en adjoignant éventuellement à σ les points où h s'annule. En effet, $|h|$ est toujours continue comme composée d'applications continues. Si h ne change pas de signe (ou reste nulle) à l'intérieur d'un des segments de σ, alors la restriction de $|h|$ à ce segment coïncide avec celle de $\pm h$ et est donc également affine. Si h change strictement de signe à l'intérieur d'un des segments de σ, alors c'est par monotonie le seul point d'annulation de h sur ce segment, et la restriction de $|h|$ coïncide avec $\pm h$ à gauche et à droite de ce point et est donc affine sur les deux nouveaux intervalles ainsi créés.

$*$ Si $\sigma_1 = (a_0, \ldots, a_n)$ $(n \geq 1)$ est une subdivision de $[a,b]$ subordonnée à $|h|$, alors $\sup\limits_{[a,b]} |h| = \max\limits_{[a,b]} |h|$ est atteint en l'un des a_i, $i \in \{0, \ldots, n\}$. En effet, on a aussitôt

$$\max_{[a,b]} |h| = \max\{\max_{[a_{i-1},a_i]} |h|, 1 \leq i \leq n\}$$

et chacun des $\max\limits_{[a_{i-1},a_i]} |h|$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ est atteint en une extrémité de a_{i-1} ou en a_i puisque la restriction de h à $[a_{i-1}, a_i]$ est affine donc monotone.

On en vient maintenant aux questions posées.

$*$ Comme $S_n f \in \mathcal{C}_0$, on sait par la question 9c que $S_n(S_n f)$ et $S_n f$ coïncident sur tous les $\ell 2^{-n-1}$ pour $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$. Comme ce sont deux fonctions continues et affines sur chaque intervalle $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$ pour $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$ par la question 9a, elles coïncident en fait sur $[0,1]$ entier. Il en résulte que $S_n \circ S_n = S_n$ et que S_n est bien un projecteur de $\mathcal{C}$. La formulation « projecteur sur $\mathcal{C}_0$ » doit être lue comme « projecteur d'image incluse dans $\mathcal{C}_0$ » puisqu'il est évident que $\operatorname{Im} S_n \neq \mathcal{C}_0$ car $\operatorname{Im} S_n$ ne contient que des fonctions affines par morceaux.

$*$ Par définition des $(\theta_{j,k})_{(j,k)\in\mathcal{I}}$, une subdivision subordonnée à $|S_n f|$ est constituée des points $(\ell 2^{-n-1})_{\ell\in\mathcal{T}_{n+1}}$ auxquels on ajoute les éventuels points d'annulation de $S_n f$. Le maximum de $|S_n f|$ est donc atteint en l'un de ces points, donc en l'un des $(\ell 2^{-n-1})_{\ell\in\mathcal{T}_{n+1}}$ puisque $|S_n f|$ s'annule sur les autres points. On déduit de 9c que

$$\|S_n f\|_\infty = \max\{|S_n f(\ell 2^{-n-1}), \ell \in \mathcal{T}_{n+1}\} = \max\{|f(\ell 2^{-n-1}), \ell \in \mathcal{T}_{n+1}\} \leq \|f\|_\infty.$$

Ceci prouve que la norme subordonnée $\|S_n f\|$ vérifie $\|S_n f\| \leq 1$. Cependant, le raisonnement ci-dessus montre que pour l'application f constante égale à 1, on a $\|S_n f\|_\infty = 1 = \|f\|_\infty$. Finalement, on a bien

$$\|S_n\| = 1$$

ce qu'on voulait.

11a. Pour $s \in]0,1[$, la fonction $x \mapsto x^s$ est concave sur $\mathbf{R}_+$. On a donc en particulier pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}_+^2$

$$\frac{a^s + b^s}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^s$$

ce qui donne bien $a^s + b^s \leq 2^{1-s}(a+b)^s$.

11b. Soit $f \in \Gamma^s(x_0) \cap \mathcal{C}_0$. Pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned}
|c_{j,k}(f)| &= \left| f\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - f(x_0) + \frac{f(x_0) - f(k2^{-j}) + f(x_0) - f((k+1)2^{-j})}{2} \right| \\
&\leq \left| f\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - f(x_0)\right| + \frac{1}{2}|f(x_0) - f(k2^{-j})| + \frac{1}{2}|f(x_0) - f((k+1)2^{-j})| \\
&\leq M_{s,x_0}(f)\left[\left|x_0 - \left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right|^s + \frac{1}{2}|x_0 - k2^{-j}|^s + \frac{1}{2}|x_0 - (k+1)2^{-j}|^s\right].
\end{aligned}$$

On note dans la suite $M = M_{s,x_0}(f)$. On distingue alors les cas suivants.
$*$ Si $x_0 > (k+1)2^{-j}$, alors

$$|x_0 - (k+1)2^{-j}| \leq \left|x_0 - \left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right| \leq |x_0 - k2^{-j}|.$$

d'où

$$|c_{j,k}(f)| \leq 2M|x_0 - k2^{-j}|^s \leq 2M(|x_0 - k2^{-j}| + 2^{-j})^s.$$

$*$ Si $x_0 < k2^{-j}$, il vient de même

$$|x_0 - k2^{-j}| \leq \left|x_0 - \left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right| \leq |x_0 - (k+1)2^{-j}|.$$

d'où

$$|c_{j,k}(f)| \leq 2M|x_0 - (k+1)2^{-j}|^s \leq 2M(|x_0 - k2^{-j}| + 2^{-j})^s.$$

$*$ Si $x_0 \in [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$, alors $\left|x_0 - \left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right|$, $|x_0 - k2^{-j}|$ et $|x_0 - (k+1)2^{-j}|$ sont tous les trois majorés par 2^{-j}. Il vient

$$|c_{j,k}(f)| \leq 2M2^{-sj} \leq 2M(|x_0 - k2^{-j}| + 2^{-j})^s.$$

On a donc dans tous les cas

$$|c_{j,k}(f)| \leq 2M(|x_0 - k2^{-j}| + 2^{-j})^s$$

ce qu'on voulait en posant $c_1 = 2M$.

Remarque : on n'a pas utilisé la question 11a... Mais on s'en servira plus tard !

Troisième partie : minoration de l'exposant de Hölder ponctuel

12. On a $0 < |x - x_0| \leq 1$, d'où $\log_2 |x - x_0| \leq 0$. On pose alors $n_0 = E(-\log_2 |x - x_0|) \in \mathbf{N}$, si bien que par croissance de $x \mapsto 2^x$

$$n_0 \leq -\log_2 |x - x_0| < n_0 + 1 \iff 2^{-n_0} \geq |x - x_0| > 2^{-n_0 - 1}.$$

Réciproquement, l'inégalité $2^{-n_0-1} < |x - x_0| \leq 2^{-n_0}$ impose $n_0 \leq -\log_2 |x - x_0| < n_0 + 1$ et donc $n_0 = E(-\log_2 |x - x_0|)$, d'où l'unicité.

13. On a par définition $\theta_{j,k}(x) = 0$ dès que $x \notin [\tilde{k}_j(x)2^{-j}, (\tilde{k}_j(x) + 1)2^{-j}]$ et de même pour x_0. On en déduit que

$$W_j = \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \, |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| = |c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)| \, |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| + |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| \, |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| \, .$$

En utilisant le résultat de 5d, il vient bien

$$W_j \leq \left(|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)| + |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)|\right) 2^{j+1}|x - x_0|.$$

14a. À l'aide de $(\mathcal{P}_1)$ et de la question précédente, on a

$$W_j \leq c_1 \left((2^{-j} + |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0|)^s + (2^{-j} + |\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0|)^s\right) 2^{j+1}|x - x_0|$$

puis en utilisant 11a

$$\begin{aligned} W_j &\leq c_1 2^{1-s} \left(2^{-j+1} + |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0| + |\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0|\right)^s 2^{j+1}|x - x_0| \\ &\leq c_1 2^{1-s+s(1-j)+j+1} \left(1 + |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0|2^{j-1} + |\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0|2^{j-1}\right)^s |x - x_0| \\ &\leq 4c_1 2^{j(1-s)} 3^s |x - x_0| \end{aligned}$$

puisque par définition $|\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0|$ et $|\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0|$ sont inférieurs à 2^{-j}. Ceci est bien l'inégalité voulue.

14b. Rappelons que $|x - x_0| \leq 2^{-n_0}$ d'où

$$2^{(n_0+1)(1-s)}|x - x_0|^{1-s} \leq 2^{1-s}.$$

Avec ceci et la question précédente, il vient en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $2^{1-s} \neq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \, |\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| &\leq 4c_1 3^s |x - x_0| \sum_{j=0}^{n_0} 2^{j(1-s)} = 4c_1 3^s |x - x_0| \frac{2^{(n_0+1)(1-s)} - 1}{2^{1-s} - 1} \\ &\leq \frac{4c_1 3^s \left[2^{(n_0+1)(1-s)}|x - x_0|^{1-s}\right]}{2^{1-s} - 1} |x - x_0|^s \\ &\leq 8c_1 \left(\frac{3}{2}\right)^s (2^{1-s} - 1)^{-1} |x - x_0|^s \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

15. On sait d'après $(\mathcal{P}_1)$ que $|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| \leq c_1(2^{-j} + |\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0|)^s$. Or, par définition, $|\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0| \leq 2^{-j}$ si bien que

$$|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| \leq c_1(2^{-j} + 2^{-j})^s = 2^{s(1-j)}c_1.$$

En se rappelant que $\theta_{j,k}(x_0) = 0$ dès lors que $x_0 \notin [\tilde{k}_j(x_0)2^{-j}, (\tilde{k}_j(x_0)+1)2^{-j}]$, et que $\|\theta_{j,k}\|_\infty = 1$ pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{j=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x_0)| &= \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| \left|\theta_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(x_0)\right| \\
&\leq c_1 2^s \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} 2^{-sj} \\
&\leq c_1 2^s \frac{2^{-s(n_0+1)}}{1-2^{-s}} \leq c_3|x-x_0|^s
\end{aligned}$$

puisque $2^{-s(n_0+1)} \leq |x-x_0|^s$ par définition de n_0.

16. Soit

$$A = \{n \in \mathbf{N}, 2^{-n_0 s} \leq \omega_f(2^{-n_1})\}.$$

Comme $\|f\|_\infty = 1$ et que $[0,1]$ est compact, il existe $y \in [0,1]$ tel que $|f(y)| = 1$. On a donc $\omega_f(1) \geq |f(y) - f(0)| = 1 \geq 2^{-n_0 s}$ si bien que $A \neq \emptyset$. On sait de plus que ω_f est croissante et continue sur $[0,1]$ et que $\omega_f(0) = 0$. On en déduit que A est majorée.

En tant que partie non-vide et majorée de $\mathbf{N}$, A possède un maximum n_1, qui est par définition l'unique $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que $\omega_f(2^{-n_1-1}) < 2^{-n_0 s} \leq \omega_f(2^{-n_1})$.

17. Soit $y \in [0,1]$. On a pour tout $n \geq n_1$ de faon analogue à 10a en posant $\ell = \tilde{k}_n(y)$

$$|f(y) - S_n f(y)| \leq |f(y) - f(\ell 2^{-n-1})| + |f(\ell 2^{-n-1}) - f((\ell+1)2^{-n-1})|.$$

Comme $n \geq n_1$, on a $|y - \ell 2^{-n-1}| \leq 2^{-n-1} \leq 2^{-n_1-1}$ et de même $|\ell 2^{-n-1} - (\ell+1)2^{-n-1}| \leq 2^{-n_1-1}$. Il vient

$$|f(y) - S_n f(y)| \leq 2\omega_f(2^{-n_1-1}) \leq 2^{1-n_0 s} = 2^{1+s}2^{-s(n_0+1)} \leq 2^{s+1}|x-x_0|^s$$

ce qu'on voulait en passant à la borne supérieure en y.

18a. En utilisant l'ineffable propriété $(\mathcal{P}_1)$, le fait subtil que $\theta_{j,k}(x) = 0$ dès lors que $x \notin [\tilde{k}_j(x)2^{-j}, (\tilde{k}_j(x)+1)2^{-j}]$, la remarque tout à fait originale que $\|\theta_{j,k}\|_\infty = 1$ pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$ et enfin le résultat à la fois simple et judicieux que $2^{-j} \leq |x - x_0|$ pour $j \geq n_0+1$, on a comme d'habitude, mais tout particulièrement comme en 14a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x)| &= \sum_{j=n_0+1}^{n_1} |c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)| \left|\theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x)\right| \\
&\leq c_1 \sum_{j=n_0+1}^{n_1} (2^{-j} + |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x|)^s \\
&\leq c_1 \sum_{j=n_0+1}^{n_1} 2^{-js}(1 + |\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x|2^{-j})^s \\
&\leq c_1 3^s \sum_{j=n_0+1}^{n_1} |x-x_0|^s = c_1 3^s (n_1 - n_0)|x-x_0|^s
\end{aligned}$$

et on est super contents.

18b. L'inégalité $n_1 - n_0 \leq n_1 + 1$ est évidente. En outre, par $(\mathcal{P}_2)$

$$\omega_f(2^{-n_1}) \leq c_4(N)(1 + |\log_2(2^{-n_1})|)^{-N} = c_4(N)(n_1+1)^{-N}$$

d'où $n_1 + 1 \leq \left(\dfrac{c_4(N)}{\omega_f(2^{-n_1})}\right)^{\frac{1}{N}}$. Avec cette majoration, la question précédente et les définitions de n_0 et n_1, il vient immédiatement

$$\begin{aligned}\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x)| &\leq c_1 3^s (n_1 - n_0)|x - x_0|^s \\ &\leq c_1 3^s \left(\frac{c_4(N)}{\omega_f(2^{-n_1})}\right)^{\frac{1}{N}} |x - x_0|^s \\ &\leq c_1 3^s (c_4(N))^{\frac{1}{N}} 2^{\frac{n_0 s}{N}} |x - x_0|^s \\ &\leq c_5(N)|x - x_0|^{(1-\frac{1}{N})s}.\end{aligned}$$

19. Par la question 17, on a pour $n \geq n_1$ et pour tout $x \in [0,1]$

$$\|f - S_n f\|_\infty \leq 2^{s+1}|x - x_0|^s$$

d'où

$$|f(x) - f(x_0) - S_n f(x) - S_n f(x_0)| \leq |f(x) - S_n f(x)| + |f(x_0) - S_n f(x_0)| \leq 2^{s+2}|x - x_0|^s$$

si bien que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2^{s+2}|x - x_0|^s + |S_n f(x) - S_n f(x_0)|. \qquad (A)$$

$*$ Si $n_0 \geq n_1$, on prend $n = n_0$ dans la majoration (A). On sait alors par 14b que

$$|S_{n_0} f(x) - S_{n_0} f(x_0)| \leq \sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| \leq c_2|x - x_0|^s.$$

Il vient dans ce cas

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (2^{s+2} + c_2)|x - x_0|^s$$

si bien que $f \in \Gamma^s(x_0)$ et donc $\alpha_f(x_0) \geq s$.

$*$ Si $n_0 < n_1$, on a

$$\begin{aligned}|S_{n_1} f(x) - S_{n_1} f(x_0)| &\leq \sum_{j=0}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)||\theta_{j,k}(x)| \\ &\qquad + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)||\theta_{j,k}(x_0)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)||\theta_{j,k}(x)| \\ &\qquad + \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)||\theta_{j,k}(x_0)|\end{aligned}$$

En combinant 14b, 15, 18b et la majoration (A) avec $n = n_1$, il vient pour tout $N \in \mathbf{N}^*$ en tenant compte de $|x - x_0| \leq 1$

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq 2^{s+2}|x - x_0|^s + c_2|x - x_0|^s + c_3|x - x_0|^s + c_5(N)|x - x_0|^{s\left(1-\frac{1}{N}\right)} \\ &\leq (2^{s+2} + c_2 + c_3 + c_5(N))|x - x_0|^{s\left(1-\frac{1}{N}\right)}.\end{aligned}$$

On en déduit que $f \in \Gamma^{s\left(1-\frac{1}{N}\right)}(x_0)$ et donc $\alpha_f(x_0) \geq s\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)$ pour tout $N \in \mathbf{N}^*$. Par passage à la limite quand N tend vers $+\infty$, on obtient bien $\alpha_f(x_0) \geq s$.

Youpi.