X-ENS 2013

Mathématiques A

*Un corrigé proposé par : **AQALMOUN MOHAMED** agrégé de mathématiques CPGE Khouribga*

Première partie : Opérateurs sur les fonctions à support fini

1. (a) La fonction nulle est un élément de V.
Si f et g sont des éléments de V, et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $supp(f+\lambda g) \subset supp(f) \cup supp(g)$, ainsi $f+\lambda g$ est un éléments de V.
   (b) Soient $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $E(f+\lambda g)(k) = (f+\lambda g)(k+1) = f(k+1) + \lambda g(k+1) = E(f)(k) + \lambda E(g)(k)$, donc $E(f+\lambda g) = E(f) + \lambda E(g)$.
Si f est à support fini, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k \in supp(E(f))$ si, et seulement si, $E(f)(k) \neq 0$ si, et seulement si, $f(k+1) \neq 0$ si, et seulement si, $k+1 \in supp(f)$, ainsi $supp(E(f)) = \{k \in \mathbb{Z} \ \ , \ k+1 \in supp(f)\}$ qui est un ensemble fini.
On en déduit que V est stable par E.
2. Si $f \in \ker(E)$, alors $\forall k \in \mathbb{Z}, \ \ f(k+1) = 0$, donc $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f(k) = f(k-1+1) = 0$ d'où $f = 0$.
Pour $g \in V$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on pose $f(k) = g(k-1)$, on a alors $E(f) = g$
3. (a) Soient A une partie finie de $\mathbb{Z}$, et $(\lambda_i)_{i\in A}$ une famille de nombres complexes telles que $\sum_{i\in A} \lambda_i v_i = 0$, pour $i_0 \in A$ on a $(\sum_{i\in A} \lambda_i v_i)(i_0) = \lambda_{i_0} v_{i_0}(i_0) = \lambda_{i_0}$, donc $\lambda_{i_0} = 0$, donc la famille $(v_i)_{i\in Z}$ est libre.
Pour $f \in V$, on pose $A = supp(f)$ partie finie de $\mathbb{Z}$, on a alors $f = \sum_{i\in A} f(i) v_i$, on en déduit que $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une base de V.
   (b) Pour $k \in \mathbb{Z}$, $E(v_i)(k) = v_i(k+1) = 1$ si $k = i-1$ et 0 sinon. donc $E(v_i) = v_{i-1}$.
4. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $(H \circ E)(v_i) = H(v_{i-1}) = \lambda(i-1)v_{i-1}$ et $(E \circ H + 2E)(v_i) = E(\lambda(i)v_i) + 2v_{i-1} = \lambda(i)v_{i-1} + 2v_{i-1}$, puisque $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une base de V, donc on a égalité si, et seulement si, $\forall i \in \mathbb{Z}$, $(\lambda(i)+2)v_{i-1} = \lambda(i-1)v_{i-1}$ cette dernière est vérifié si, et seulement si, $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\lambda(i) - \lambda(i-1) = -2$, si $i \geq 1$ on obtient $\sum_{k=1}^{i} (\lambda(k) - \lambda(k-1)) = -2\sum_{k=1}^{i} 1$, d'où $\lambda(i) - \lambda(0) = -2i$, si $i < 0$ on obtient $\sum_{k=1}^{-i} (\lambda(i+k) - \lambda(i+k-1)) = -\sum_{k=1}^{-i} 2$, c'est-à-dire $\lambda(0) - \lambda(i) = 2i$, donc $\lambda(i) = \lambda(0) + 2i$,d'où $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\lambda(i) = \lambda(0) - 2i$, et la formule est aussi vérifiée pour $i = 0$.
Réciproquement si $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\lambda(i) = \lambda(0) - 2i$ alors $\forall i \in \mathbb{Z}$ $\lambda(i) - \lambda(i-1) = -2$, d'où l'équivalence.
5. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a $E \circ F(v_i) = \mu(i)v_i$ et $F \circ E(v_i) + H(v_i) = \mu(i-1)v_i + \lambda(i)v_i$, puisque la famille $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une base de V, alors $E \circ F = F \circ E + H$ si, et seulement si, $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mu(i)v_i = (\mu(i-1) + \lambda(i))v_i$, si, et seulement si, $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mu(i) = \mu(i-1) + \lambda(i)$ ou encore $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mu(i) - \mu(i-1) = \lambda(i)$, par un même raisonnement que la question précédente , on obtient $\mu(i) = \mu(0) + i(\lambda(0) - 1) - i^2$, réciproquement si $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mu(i) = \mu(0) + i(\lambda(i) - 1) - i^2$, alors μ vérifie $\mu(i) - \mu(i-1) = \lambda(i)$.D'où l'équivalence.

6. (a) *Pour $f \in V$, posons $A = supp(f)$ qui est une partie finie de $\mathbb{Z}$, on a $f = \sum_{i\in A} f(i)v_i$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H^n(f) = \sum_{i\in A} f(i)^n v_i$ qui est un élément du sous espace vectoriel engendré par la famille $(v_i)_{i\in A}$, donc le sous espace vectoriel engendré par les $H^n(f)$, $n \in \mathbb{N}$, est inclus dans le sous espace vectoriel engendré par la famille $(v_i)_{i\in A}$, qui est de dimension fini.*

   (b) *Soit U un sous espace vectoriel de V non réduit à $\{0\}$, stable par H, soit f un élément non nul de U, le sous espace vectoriel U' engendré par les $H^n(f)$, $n \in \mathbb{N}$ est dimension fini et stable par H, considérons H' l'endomorphisme induit par H sur U', comme U' est de dimension fini alors H admet au moins une valeur propre $\alpha \in \mathbb{C}$ associé à un vecteur propre $g \in U'\backslash\{0\}$, de sorte que $H'(g) = \alpha g$ ou encore $H(g) = \alpha g$.*
   Or $g \in V\backslash\{0\}$, alors $B = supp(g)$ est une partie de $\mathbb{Z}$ non vide et finie. Puisque $g = \sum_{i\in B} g(i)v_i$ donc $\sum_{i\in B} \lambda(i)v_i = \alpha \sum_{i\in B} v_i$, on obtient $\forall i \in B$, $\lambda(i) = \alpha$, comme λ est injective ($\lambda(i) = \lambda(0) - 2i$), cette égalité n'est vérifie que si B est réduit à un singleton $B = \{i_0\}$, il en résulte que $g = v_{i_0} \in U'$, donc $v_{i_0} \in U$.

7. (a) *$\mu(i) = 1 - i - i^2$, remarquons que l'équation $1 - X - X^2 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$, donc $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mu(i) \neq 0$, donc la famille $(\mu(i)v_{i+1})_{i\in Z}$ est une base de V (avec un changement d'indice il s'agit de la famille $(\mu(i-1)v_i)_{i\in Z}$), on en déduit que F transforme une base de V en une base de V, donc $F \in GL(V)$.*

   (b) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $i \in Z$, $E^n(v_i) = v_{i+n} \neq v_i$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E^n \neq \mathrm{Id}_V$, autrement dit E est d'ordre infini.*
   De même , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $i \in \mathbb{Z}$, $F^n(v_i) = (\prod_{k=0}^{n-1} \mu(i+k))v_{i+n} \neq v_i$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $F^n \neq \mathrm{Id}_V$, ainsi F est d'ordre infini.

   (c) *Soit $f = \sum_{i\in A} f(i)v_i \in V$, avec $A = supp(f)$; si $f \in \ker(H)$, alors $\sum_{i\in A} \lambda(i)f(i)v_i = 0$, donc $\forall i \in A$, $\lambda(i)f(i) = 0$, ainsi $\forall i \in A$, $\lambda(i) = 0$, mais $\lambda(i) = 0$ si, et seulement si, $i = 0$, il vient que $A \subset \{0\}$, d'où $f = f(0)v_0$ ou $f = 0$, on en déduit que $\ker H$ est la droite engendré par v_0.*
   H n'est pas injective, donc pour tout $r \geq v$, H^r n'est pas injective , d'où pour tout $r \geq 1$, $H^r \neq \mathrm{Id}_V$.

8. (a) *On considère le morphisme d'algèbres $\varphi : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[E]$, définie par $\varphi(p) = p(E)$.*
   φ est un morphisme d'algèbres surjectif, pour l'injectivité :
   Soit $p \in \ker\varphi$, p s'écrit sous la forme $p = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, donc $\varphi(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k E^k = 0$, en particulier $\varphi(p)(v_n) = 0$, d'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E^k(v_n) = v_{n-k}$, on obtient $\sum_{k=0}^{n} a_k v_{n-k} = 0$, puisque la famille $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est libre, on en déduit que les a_k sont nuls, ou encore le polynôme p est nul.

   (b) *On considère le morphisme d'algèbres $\varphi : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[F]$, définie par, $\varphi(p) = p(F)$, c'est un morphime surjectif, si $p = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est dans $\ker\varphi$, alors $\varphi(F)(v_0) = 0$, d'autre part $\forall k \in \mathbb{N}$, $F^k(v_0) = \mu(k)v_k$ (la formule est vraie pour $k = 0$, puisque $\mu(0) = 1$), on obtient $\sum_{k=0}^{n} a_k \mu(k)v_k = 0$, comme la famille $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est libre, alors*

$0 \leq k \leq n$, $a_k\mu(k) = 0$, *l'injectivité de l'opérateur* F *et le fait* $\forall i \in \mathbb{Z}$ $F(v_i) = \mu(i)v_{i+1}$, *donne* $\forall i \in \mathbb{Z}$; $\mu(i) \neq 0$, *on en déduit alors que les* a_k *sont tous nuls, autrement dit le polynôme* p *est nul.*

(c) *Comme dans les questions précédentes, on considère* $\varphi : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[H]$, *définie par* $\varphi(p) = p(H)$, *qui est un morphisme d'algèbres surjectif, montrons qu'il est injectif ; si un polynôme* $p = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *est dans* $\ker \varphi$, *alors* $\sum_{k=0}^{n} H^k = 0$, $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, *on a* $H^k(v_i) = \lambda(i)^k v_i$, *on obtient* $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda(i)^k v_i = 0$, *puisque* $v_i \neq 0$, *alors* $\forall \in \mathbb{Z}$, $p(\lambda(i)) = 0$, *les* $\lambda(i)$ *sont des racines de* p, *ainsi le polynôme admet une infinité de racines "* λ *injective ", donc* p *est le polynôme nul.*

Deuxième partie :
Intermède

9. $(q^2)^\ell = q^{2\ell} = 1$, *alors* q *est une racine* ℓ*-ième de l'unité.*
   Soit $1 \leq r \leq \ell$, *tel que* $(q^2)^r = 1$, *on a alors* $q^{2r} = 1$, *donc* ℓ *divise* $2r$, *et comme* ℓ *est impair alors* ℓ *divise* r, *par suite* $l = r$.

10. (a) *Pour tout* $0 \leq i < \ell$, $G_a^\ell(v_i) = av_i$, *donc* $G_a^\ell = a\,\mathrm{Id}_{W_\ell}$.
    $(-1)^\ell(X^\ell - a)$ *est un "le" polynôme annulateur "caractéristique" de* G_a^ℓ, *scindé à racine simples* ($a \neq 0$), *donc* G_a *est diagonalisable.*

    (b) *Les valeurs propres de* G_a^ℓ *sont les* bq^i, $0 \leq i < \ell$.
    Soient $0 \leq i < \ell$ *et* v *un vecteur propre associé à la valeur propre* bq^i, *alors* $G_a(v) = bq^i v$, *si on note par* X *la matrice de* v *dans la base* $(v_0, \ldots, v_{\ell-1})$, *alors l'équation* $G_a(v) = bq^i v$ *est équivalente au système linéaire* $AX = bq^i X$ *où* A *est la matrice définie en question 10.*
    La résolution de ce système linéaire donne ${}^tX = \alpha((bq^i)^{-1}, (bq^i)^{-2}, \ldots, (bq^i)^{-\ell})$ *où* $\alpha \in \mathbb{C}$, *donc* $\ker(G_a - bq^i\,\mathrm{Id}_{W_\ell})$ *est le sous espace vectoriel engendré par le vecteur ;* $\sum_{k=0}^{\ell-1}(bq^i)^{-k}v_k$.

11. $P_a(P_a(v_i)) = P_a(a^p v_r) = a^p P_a(v_r) = a^p v_r = P_a(v_i)$, *donc* $P_a^2 = P_a$ *ainsi* P_a *est un projecteur.*
    On a aussi $\forall i \in \mathbb{Z}$, $P_a(v_i) \in w_\ell$, *réciproquement si* $0 \leq r < \ell$, $v_r = P_a(v_r)$ *donc* P_a *est un projecteur d'image* w_ℓ.

Troisième partie :
Opérateurs quantiques

12. $(H \circ E)(v_i) = \lambda(i-1)v_{i-1}$ *et* $(E \circ H)(v_i) = \lambda(i)v_{i-1}$, *donc l'égalité* $H \circ E = q^2 E \circ H$ *si, et seulement si,* $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\lambda(i-1) = q^2\lambda(i)$ *si, et seulement si,* $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\lambda(i) = \lambda(0)q^{-2i}$.

13. *Supposons que* $\ker H$ *est non nul, et soit* $f \in \ker H$, *alors* $H(E(f)) = q^2E(H(f)) = 0$, *donc* $E(f) \in \ker H$, *le sous espace vectoriel* $\ker H$ *est stable par* E, *d'après la question 6, il contient au moins un des* v_i, *il existe alors* $j \in \mathbb{Z}$ *tel que* $H(v_j) = 0$, *ceci donne* $\lambda(j) = 0$ *(mais* $\lambda(j) = \lambda(0)q^{-2j}$*), on a abouti à une contradiction, donc* H *est injective.*
    pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $v_i \in \operatorname{Im} H$, *donc* H *est surjective.*

14. *D'abord pour* $i \in \mathbb{Z}$, $H^{-1}(v_i) = \frac{1}{\lambda(i)}v_i$, *donc l'égalité* $E \circ F = F \circ E + H - H^{-1}$ *à lieu si, et seulement si,* $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mu(i) = \mu(i-1) + \lambda(i) - \lambda(i)^{-1}$ *si, et seulement si,* $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mu(i) = \mu(i-1) + \lambda(0)q^{-2i} - \lambda(0)^{-1}q^{2i}$.

15. (a) *Pour tout* $i \in \mathbb{Z}$, $\lambda(i+\ell) = \lambda(0)q^{-2i}q^{-2\ell} = \lambda(0)q^{-2i} = \lambda(i)$ *et*

$$\begin{aligned}\mu(i+\ell) - \mu(\ell) &= \sum_{k=0}^{\ell-1} \mu(i+k+1) - \mu(i+k) \\ &= \lambda(0)q^{-2(i+1)} \sum_{k=0}^{\ell-1} q^{-2k} - \lambda(0)^{-1} q^{2i} \sum_{k=1}^{\ell-1} q^{2k} \\ &= \lambda(0)q^{-2(i+1)} \frac{q^{-2\ell}-1}{q^{-2}-1} - \lambda(0)^{-1} q^{2i} \frac{q^{2\ell}-1}{q^2-1} = 0\end{aligned}$$

, donc $\mu(i+\ell) = \mu(i)$*, les deux fonctions* λ *et* μ *sont périodiques dont* ℓ *est une période, donc multiple de leurs périodes.*

(b) *Soit* r *la période de* λ*, on a* $\lambda(r) = \lambda(0)$*, donc* $(q^2)^r = 1$ *et comme* q^2 *est une racine primitive* ℓ*-ième de l'unité, alors* ℓ *divise* r*, et par la question précédente on déduit que* $r = \ell$*.*

(c) *Notons* s *la période de* μ *(diviseur de* ℓ *avec* $1 \leq s \leq \ell$*), alors* $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mu(i+s) - \mu(i) = 0$*, et d'autre part* $\forall i \in \mathbb{Z}$*, on a :*

$$\begin{aligned}\mu(i+s) - \mu(i) &= \sum_{k=0}^{s-1} \mu(i+k+1) - \mu(i+k) \\ &= \lambda(0)q^{-2(i+1)} \frac{1-q^{-2s}}{1-q^{-2}} - \lambda(0)^{-1} q^{2(i+1)} \frac{q^{2s}-1}{q^2-1} \\ &= \lambda(0)^{-1} q^{-2(i-1)} \left(\frac{q^{2s}-1}{q^2-1}\right) \left[\lambda(0)^2 q^{-2(s+1)} - q^{4i}\right]\end{aligned}$$

Comme la suite $(q^{4i})_{i\in\mathbb{Z}}$ *n'est pas constante , alors* $q^{2s} = 1$ *et donc* ℓ *divise* s*, ceci montrer que* $\ell = s$*.*

16. (a) $(q-q^{-1})(F \circ E + H - H^{-1}) + q^{-1}H + qH^{-1} = (q-q^{-1})F \circ E + (q-q^{-1})(H - H^{-1}) + q^{-1}H + qH^{-1} = C$.

(b) $Cv_i = (q-q^{-1})(F \circ E)v_i + qHv_i + q^{-1}H^{-1}v_i = (q-q^{-1})\mu(i-1)v_i + q\lambda(i)v_i + q^{-1}\lambda(i)^{-1}v_i = \alpha_i v_i$ *où* $\alpha_i = (q-q^{-1})\mu(i-1) + q\lambda(i) + q^{-1}\lambda(i)^{-1}$*, donc* v_i *est un vecteur propre associé à la valeur propre* α_i*.*

(c) *Il suffit de montrer que la suite* $(\alpha_i)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est constante.*
Pour $i \in \mathbb{Z}$ *;*

$$\begin{aligned}\alpha_{i+1} &= (q-q^{-1})\mu(i) + q\lambda(i+1) + q^{-1}\lambda(i+1)^{-1} \\ &= (q-q^{-1})(\mu(i-1) + \lambda(i) - \lambda(i)^{-1}) + q^{-1}\lambda(i) + q\lambda(i)^{-1} \\ &= (q-q^{-1})\mu(i-1) + q\lambda(i) + q^{-1}\lambda(i)^{-1} = \alpha_i\end{aligned}$$

, on en déduit alors que C *est une homothétie de rapport* $\alpha_1 = (q-q^{-1})\mu() + q\lambda(1) + q^{-1}\lambda(1)^{-1} = (q-q^{-1})\mu(0) + q^{-1}\lambda(0) + q\lambda(0)^{-1}$*, ainsi*

$$\boxed{R(\lambda(0), \mu(0), q) = (q-q^{-1})\mu(0) + q^{-1}\lambda(0) + q\lambda(0)^{-1}}$$

Remarque : *Pour tout* $i \in \mathbb{Z}$ *:*

$$\boxed{R(\lambda(0),\mu(0),q)=(q-q^{-1})\mu(i)+q^{-1}\lambda(i)+q\lambda(i)^{-1}}$$

(d) *Il s'agit de l'application* $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, *définie par* $z\mapsto(q-q^{-1})z+q^{-1}\lambda(0)+q\lambda(0)^{-1}$ *qui est une bijection puisque* $q-q^{-1}\neq 0$ *ou encore puisque* $q^2\neq 1$.

(e) *Ici il s'agit de l'application* $\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$, *définie par* $z\mapsto q^{-1}z+qz^{-1}+k$ *où* k *est la constante* $(q-q^{-1})\mu(0)$. *Soit* $Z\in\mathbb{C}$, *alors l'équation* $q^{-1}z+qz^{-1}+k=Z$ *admet des solution dans* $\mathbb{C}^*$ *si, et seulement si, l'équation* $z^2+q(k-Z)z+q^2=0$ *admet des solution dans* $\mathbb{C}^*$. *Cette dernière équation admet des solutions dans* $\mathbb{C}^*$ *(*0 *n'est pas solution), donc l'application est surjective.*
En calculant l'image de iq *et* $-iq$ *on voit bien que l'application n'est pas injective.*

Quatrième partie : Opérateurs quantiques modulaires

17. (a) $P_a\circ\phi\circ P_a=P_a^2\circ\phi=P_a\circ\phi$, *donc* ϕ *est compatible avec* P_a.

(b) *Soit* $i\in\mathbb{Z}$, *avec* $i=p\ell+r$ *la division euclidienne de* i *par* ℓ, *on a*
$P_a\circ H\circ P_a v_i=P_a\circ H(a^p v_r)=a^pP_a(\lambda(r)v_r)=a^p\lambda(r)v_r$
$P_a\circ Hv_i=P_a(\lambda(i)v_i)=\lambda(i)a^pv_r=\lambda(r+p\ell)a^pv_r=\lambda(r)a^pv_r$ *(*λ *est* ℓ*-périodique).*
Donc H *est compatible avec* P_a.
De même on obtient $P_a\circ H^{-1}\circ P_av_i=a^p\lambda(r)^{-1}v_r=P_a\circ H^{-1}v_i$, *c'est-à-dire* H^{-1} *est compatible avec* P_a.

18. *D'abord* $\mathrm{Id}_V\in\mathcal{U}_q$.
Pour $\psi,\phi\in\mathcal{U}_q$ *et* $\lambda\in\mathbb{C}$ *on a :*
• $P_a\circ(\phi+\lambda\psi)\circ P_a=P_a\circ\phi\circ P_a+\lambda P_a\circ\psi P_a=P_a\circ\phi+\lambda P_a\circ\phi=P_a\circ(\phi+\lambda\psi)$.
•

$$\begin{aligned}P_a\circ\phi\circ\psi\circ P_a &= [P_a\circ\phi\circ P_a]\circ\psi\circ P_a\\ &= P_a\circ\phi\circ[P_a\circ\psi\circ P_a]\\ &= P_a\circ\phi\circ[P_a\circ\psi]\\ &= [P_a\circ\phi\circ P_a]\circ\psi\\ &= P_a\circ\phi\circ\psi\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{U}_q$ *est une sous algèbre de* $\mathcal{L}(V)$.

19. *Notons* $i=p\ell+r$ *la division euclidienne de* i *par* ℓ.
• $(P_a\circ E\circ P_a)(v_i)=P_a(a^pv_{r-1})=a^pP_a(v_{r-1})$;
<u>Si $r=0$</u>, alors $P_a(v_{r-1})=P_a(v_{-1})=a^{-1}v_{\ell-1}$, *donc* $(P_a\circ E\circ P_a)(v_i)=a^{p-1}v_{\ell-1}$.
Et on a aussi $P_a(E(v_i))=P_a(v_{i-1})=P_a(v_{(p-1)\ell+\ell-1})=a^{p-1}v_{\ell-1}$.
<u>Si $0<r<\ell$</u>, c'est-à-dire $0\le r-1$, *alors* $P_a(v_{r-1})=v_{r-1}$, *donc* $(P_a\circ E\circ P_a)(v_i)=a^pv_{r-1}$, *et on a aussi* $P_a(E(v_i))=P_a(a^qv_{r-1})=a^pv_{r-1}$.
Il en résulte que $P_a\circ E\circ P_a=P_a\circ E$.
• $(P_a\circ F\circ P_a)(v_i)=a^p\mu(r)P_a(v_{r+1})$;
<u>Si $r=\ell-1$</u>, c'est-à-dire $r+1=\ell=1.\ell+0$, *alors* $P_a(v_{r+1})=av_0$, *puis* $(P_a\circ F\circ P_a)(v_i)=a^{p+1}\mu(r)v_0$, *et on a aussi* $(P_a\circ F)(v_i)=P_a(\mu(i)v_{i+1})=\mu(i)P_a(v_{(p+1)\ell})=\mu(i)a^{p+1}v_0$, *puisque* μ *est* ℓ *périodique alors* $\mu(i)=\mu(r)$, *donc dans ce cas* $(P_a\circ F\circ P_a)(v_i)=(P_a\circ F)(v_i)$.
<u>Si$0\le r<\ell-1$</u>, c'est-à-dire $r+1\le\ell-1$, *alors* $P_a(v_{r+1})=v_{r+1}$, *et on aussi* $P_a(F(v_i))=\mu(i)P_a(v_{i+1})=\mu(r)P_a(v_{p\ell+(r+1)})=\mu(r)a^pv_{r+1}$, *l'égalité est vérifiée aussi dans ce cas.*
D'où $P_a\circ F\circ P_a=P_a\circ F$.

20. (a) *Pour* $\phi\in\mathcal{U}_q$, *on pose* $\Psi_a(\phi)=P_a\circ\phi/_{W_\ell}$, *on a alors* $\forall\phi\in\mathcal{U}_q$, $\Psi_a(\phi)\circ P_a=P_a\circ\phi/_{W_\ell}\circ P_a=P_a\circ\phi\circ P_a=P_a\circ\phi$.

Soit $\Psi'_a : \mathcal{U}_q \to \mathcal{L}(W_\ell)$, tel que $\forall \phi \in \mathcal{U}_q$, $\Psi'_a(\phi)\circ P_a = P_a \circ \phi$,soit $\phi \in \mathcal{U}_q$ on a $\Psi_a(\phi), \Psi'_a(\phi) \in \mathcal{L}(W_\ell)$, pour $0 \leq i < \ell$, on a :
$(\Psi'_a(\phi)\circ P_a)(v_i) = (\Psi_a \circ P_a)(v_i)$,comme $P_a(v_i) = v_i$ alors $\Psi'_a(\phi)v_i = \Psi_a(\phi)v_i$, d'où $\Psi'_a(\phi) = \psi_a(\phi)$, on en déduit alors que $\Psi'_a = \Psi_a$.

(b) *Soit $\phi \in \mathcal{U}_q$ tel que $\phi \in \ker \Psi_a$.*
Soit $g \in V$, posons $\phi(g) = \sum_{i\in A} \alpha_i v_i$ avec A une partie fine de $\mathbb{Z}$, pour chaque $i \in A$ on note $i = p_i\ell + r_i$ la division euclidienne de i par ℓ, on a alors $\phi(g) = \sum_{i\in A} \alpha_i v_i = \sum_{s=0}^{\ell-1} \sum_{\substack{r_i=s\\ i\in A}} \alpha_i v_i$, par hypothèse $\Psi_a(\phi) = 0$, alors $\Psi_a(\phi)(g) = 0$, donc $\sum_{s=0}^{\ell-1} \sum_{\substack{r_i=s\\ i\in A}} \alpha_i P_a(v_i) = 0$, ainsi $\sum_{s=0}^{\ell-1} \sum_{\substack{r_i=s\\ i\in A}} \alpha_i a^{p_i} v_s = 0$, par la liberté de la famille $(v_s)_{0\leq s<\ell}$, on obtient, pour tout s $(0 \leq s < \ell)$, on a $\sum_{\substack{r_i=s\\ i\in A}} \alpha_i a^{p_i} v_s = 0$, on en déduit alors que;

$$\begin{aligned}
\phi(g) &= \sum_{i\in A} \alpha_i v_i \\
&= \sum_{s=0}^{\ell-1} \sum_{\substack{r_i=s\\ i\in A}} \alpha_i v_i - \sum_{s=0}^{\ell-1} \sum_{\substack{r_i=s\\ i\in A}} \alpha_i a^{p_i} v_s \\
&= \sum_{s=0}^{\ell-1} \sum_{\substack{r_i=s\\ i\in A}} \alpha_i (v_i - a^{p_i} v_s) \\
&= \sum_{s=0}^{\ell-1} \sum_{\substack{r_i=s\\ i\in A}} \alpha_i (v_i - a^{p_i} v_{r_i})
\end{aligned}$$

La réciproque est immédiate.

21. (a) *$\Psi_a(E)(v_0) = P_a(E(v_0)) = P_a(v_{-1})$, la division euclidienne de -1 par ℓ s'écrit $-1 = (-1).\ell + (\ell - 1)$, donc $\Psi_a(E)(v_0) = a^{-1}v_{\ell-1}$.*

(b) *On a $\Psi_a(E)(v_0) = a^{-1}v_{\ell-1}$, et $0 < \forall i < \ell$, $\Psi_a(E)(v_i) = v_{i-1}$, on compose ℓ-fois on obtient $0 \leq \forall i < \ell$, $\Psi_a(E)^\ell(v_i) = a^{-1}v_i$, c'est-à-dire $\Psi_a(E^\ell)(v_i) = a^{-1}v_i$, d'où $\Psi_a(E^\ell) = a^{-1}\operatorname{Id}_{W_\ell}$.*

(c) *Il est facile de vérifier que $X^\ell - a^{-1}$ est le polynôme minimale de $\Psi_a(E)$, donc $\mathbb{C}[\Psi_a(E)] = \bigoplus_{k=0}^{\ell-1} \mathbb{C}\Psi_a(E)^k$, ainsi $\dim(\mathbb{C}[\Psi_a(E)]) = \ell$.*

(d) *Les vecteurs propres de $\psi_a(E)$, d'abord les valeurs propres de $\Psi_a(E)$ sont les racines ℓ-ièmes de a^{-1}, ce sont alors les nombres $(bq^i)^{-1}$, $0 \leq i < \ell - 1$.*
D'une façon analogue à la (question 10.b), on démontrer que $\ker(\Psi_a(E) - (bq^i)^{-1}\operatorname{Id}_{W_\ell})$ est le sous espace vectoriel engendré par u_i où u_i et le vecteur de composante $((bq^i)^{-1}, (bq^i)^{-2}, \ldots, (bq^i)^{-\ell})$ dans la base $(v_0, v_1, \ldots, v_{\ell-1})$.

22. (a) *Si W est un sous espace vectoriel de W_ℓ stable par $\Psi_a(H)$, alors l'endomorphisme induit par $\Psi_a(H)$ sur W admet au moins un vecteur propre $v \in W$, par la même façon que la question 6.b, le vecteur v est l'un des vecteur v_i, $0 \leq i < \ell$.*

(b) *Si de plus W est stable par $\Psi_a(E)$, alors les éléments $v_r, \Psi_a(E)(v_r), \dots, \Psi_a(E)^{\ell-1}(v_r)$ sont dans W, où $0 \leq r < \ell$ tel que $v_r \in W$, c'est-à-dire W contient les vecteurs $v_r, \dots, v_{\ell-1}, \dots, a^{-1}v_0, \dots, a^{-1}v_{r-1}$. Or la famille formé par ces vecteurs forme une base de W_ℓ, alors $W = W_\ell$.*

23. *Expression le l'opérateur $\Psi_a(F)^\ell$, pour tout $0 \leq i < \ell$, on a $\Psi_a(F)^\ell(v_i) = a(\prod_{k=0}^{\ell-1}\mu(k))v_i$ d'où $\Psi_a(F)^\ell = (\prod_{k=0}^{\ell-1}\mu(k))\,\mathrm{Id}_{W_\ell}$, le polynôme caractéristique de $\Psi_a(F)$ est $(-1)^\ell X^\ell - (-1)^\ell a\prod_{k=0}^{\ell-1}\mu(k)$, donc $\Psi_a(F)$ est nilpotent si, et seulement si, $\prod_{k=1}^{\ell-1}\mu(k) = 0$ si, et seulement si, $0 \leq \exists k < \ell$ tel que $\mu(k) = 0$, comme $\forall i \in \mathbb{Z}$, $R(\lambda(0), \mu(0), q) = (q - q^{-1})\mu(i) + q^{-1}\lambda(i) + q\lambda(i)^{-1}$, alors $\Psi_a(F)$ est nilpotent si, et seulement si, $0 \leq \exists k < \ell$ tel que $R(\lambda(0), \mu(0), q) = q^{-1}\lambda(k) + q\lambda(k)^{-1}$, ou encore (puisque μ et λ sont ℓ périodiques) si, et seulement si, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $R(\lambda(0), \mu(0), q) = q^{-1}\lambda(k) + q\lambda(k)^{-1}$.*