Mr : HAMANI Ahmed Mohammedia

I-Opérateurs sur les fonctions à support fini

1. (a) - **Montrons que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.**
   . $Supp(0) = \emptyset$, donc $0 \in V$.
   . Soient $f, g \in V$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors $Supp(f + \alpha g) \subset Supp(f) \cup Supp(g) < +\infty$, donc $f + \alpha g \in V$.
   On conclut que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

   (b) **Montrons la linéarité.**
   . $\forall f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, \alpha \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$, $E(f + \alpha g)(k) = (f + \alpha g)(k + 1) = (E(f) + \alpha E(g))(k)$, donc $E(f + \alpha g) = E(f) + \alpha E(g)$, d'où la linéarité.
   Montrons la stabilité.
   . Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a $k \in Supp(f) \iff k - 1 \in Supp(E(f))$, donc $Supp(E(f)) = Supp(f) - 1 < +\infty$, ce qui entraine la stabilité de V par E.

2. **Inversilbilité de E.**
   . Pour $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, on définit $E'(f) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ par $E'(f)(k) = f(k - 1)\ \forall k \in \mathbb{Z}$.
   . On vérifit facilement que $EoE' = E'oE = id_V$, donc $E \in GL(V)$ d'inverse E'.

3. (a) **Montrons que $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une base.**
   . Soient $p \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathbb{C}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i = 0$, donc $\forall k \in [[1, p]]$, $0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i(k) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \delta_{i,k} = \alpha_k$, donc $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est libre.
   . Soit $f \in V$ de support fini, alors $f = \displaystyle\sum_{k\in Supp(f)} f(k)v_k$, donc $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est génératrice.

   (b) **Calcul de $E(v_i)$.**
   $\forall k \in \mathbb{Z}$, $E(v_i)(k) = v_i(k + 1) = v_{i-1}(k)$, donc $E(v_i) = v_{i-1}$.

4. **Montrons l'équivalence deman dée.**
   $HoE = EoH + 2E \iff \forall i \in \mathbb{Z}, HoE(v_i) = EoH(v_i) + 2E(v_i) \iff \forall i \in \mathbb{Z}, H(v_{i-1}) = \lambda(i)E(v_i) + 2v_{i-1} \iff$
   $\iff \forall i \in \mathbb{Z}, \lambda(i - 1)v_{i-1} = \lambda(i)v_{i-1} + 2v_{i-1} \iff \forall i \in \mathbb{Z}, \lambda(i) = \lambda(i - 1) - 2 \iff \forall i \in \mathbb{Z}, \lambda(i) = \lambda(0) - 2i.$

5. **Montrons l'équivalence deman dée.**
   $EoF = FoE + H \iff \forall i \in \mathbb{Z}, EoF(v_i) = FoE(v_i) + H(v_i) \iff \forall i \in \mathbb{Z}, \mu(i)v_i = \mu(i - 1)v_i + \lambda(i)v_i \iff \forall i \in \mathbb{Z}, \mu(i) = \mu(i - 1) + \lambda(i) \iff \forall i \in \mathbb{Z}, \mu(i) = \mu(0) + \displaystyle\sum_{k=1}^{i} \lambda(k)$
   or $\lambda(k) = \lambda(0) - 2k$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{i} \lambda(k) = i\lambda(0) - 2\sum_{k=1}^{i} k = i\lambda(0) - i(i + 1) = i(\lambda(0) - 1) - i^2$, ce qui donne l'égalité demandée.

6. (a) **Montrons que $Vect(H^n(f)/n \in \mathbb{N})$ est de dimension finie.**
   Soit $f \in V$, alors $f = \displaystyle\sum_{k\in Supp(f)} f(k)v_k$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $H^n(f) = \displaystyle\sum_{k\in Supp(f)} f(k)\lambda(k)^n v_k$, ce qui montre que $Vect(H^n(f)/n \in \mathbb{N}) \subset Vect(v_k, k \in Supp(f))$, ce qui entraine la finitude de la dimension de l'espace $Vect(H^n(f)/n \in \mathbb{N})$.

   (b) **Montrons qu'un s-ev de V stable par H contient un des v_i.**
   Soit W un sous-espace de V non réduit à $\{0\}$, donc W contient $f \in V$ non nul ,donc de support non vide, et puisque il est stable par H, il contiendra le sous-espace $Vect(H^n(f)/n \in \mathbb{N})$.
   On pose $f = \displaystyle\sum_{k\in Supp(f)} f(k)v_k$ et $s = Card(Supp(f))$
   on obtient donc le système $\left\{\begin{array}{l} H^i(f) = \displaystyle\sum_{k\in Supp(f)} f(k)\lambda(k)^i v_k \\ 0 \leq i < s \end{array}\right.$ qui est un système carré de matrice de Vandermonde $A = (\lambda(k)^i)_{0\leq i<s, k\in Supp(f)}$ d'inconnus $(f(k)v_k)_{k\in Supp(f)}$.
   Or les $\lambda(k) = \lambda(0) - 2k$ sont distinctes deux à deux, donc A est inversible est la solution est unique donnée par : $(v_k)_{k\in Supp(f)} = \dfrac{1}{f(k)} A^{-1} \begin{pmatrix} f \\ H(f) \\ \vdots \\ H^{s-1}(f) \end{pmatrix} \in W$ et puisque le second membre du système

est non nul, le vecteur colonne $(v_k)_{k\in Supp(f)}$ est aussi non nul, donc W contient l'un des v_k où $k \in Supp(f)$.

7. (a) **Inversibilité de F.**
Soit $F' \in \mathcal{L}(V)$ défini par $\forall i \in \mathbb{Z}, F'(v_i) = \dfrac{1}{\mu(i)}v_{i-1}$, on vérifie facilement que $F'oF = FoF' = id_V$.

   (b) **Montrons que les ordres de E et F ne sont pas finis.**
-Supposons que E et F sont d'ordre fini, alors $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $E^n = F^n = id_V$ et , donc $v_0 = E^n(v_n) = v_n$ et $\mu(0)\mu(1)...\mu(n-1)v_n = F^n(v_0) = v_0$, ce qui est absurde.

   (c) **Noyau de H.**
-Soit $f = \sum f(k)v_k \in Ker(H)$, alors $H(f) = \sum f(k)\lambda(k)v_k = -2\sum kf(k)v_k = 0$, ce qui entraine que $f(k) = 0$ pour tout $k \neq 0$ et par suite $f = f(0)v_0$.
Réciproquement $v_0 \in Ker(H)$, donc $Ker(H) = Vect(v_0)$.
Montrons que $H^r \neq id_V$.
-Si $\exists r \geq 1$ tel que $H^r = id_V$, alors $0 = \lambda(0)^r v_0 = H^r(v_0) = v_0$, ce qui est absurde.

8. (a) **Montrons que** $\mathbb{C}[E]$ **est isomorphe à** $\mathbb{C}[X]$.
-On vérifit sans difficulté que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[E] \\ P & \longmapsto & P(E) \end{array}$ est un morphisme d'algèbre, il est surjectif par construction.
- Soit $P = \sum a_k X^k$ un élément du noyau, alors $P(E) = \sum a_k E^k = 0$, donc $\forall i \in \mathbb{Z}$ $P(E)(v_i) = \sum a_k v_{i-k} = 0$ et la liberté de la famille $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ entraine que $a_k = 0$ pour tout $0 \leq k \leq deg(P)$, c'est à dire $P = 0$.

   (b) **Montrons que** $\mathbb{C}[F]$ **est isomorphe à** $\mathbb{C}[X]$.
-On vérifit sans difficulté que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[F] \\ P & \longmapsto & P(F) \end{array}$ est un morphisme d'algèbre, il est surjectif par construction.
- Soit $P = \sum a_k X^k$ un élément du noyau, alors $P(F) = \sum a_k F^k = 0$
donc $P(F)(v_0) = \sum a_k \mu(0)\mu(1)...\mu(k-1)v_k = 0$, or les $\mu(i)$ sont non nuls et la famille $(v_i)_{0\leq i\leq deg(P)}$ est libre, ce qui entraine que $a_k = 0$ pour tout $0 \leq k \leq deg(P)$, c'est à dire $P = 0$.

   (c) **Montrons que** $\mathbb{C}[H]$ **est isomorphe à** $\mathbb{C}[X]$.
-On vérifit sans difficulté que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[H] \\ P & \longmapsto & P(H) \end{array}$ est un morphisme d'algèbre, il est surjectif par construction.
- Soit $P = \sum a_k X^k$ un élément du noyau, alors $P(H) = \sum a_k H^k = 0$, donc $\forall i \in \mathbb{Z}$ $P(H)(v_i) = \sum a_k \lambda(i)^k v_i = \sum (-2i)^k a_k v_i = 0$ d'où $\forall i \in \mathbb{Z}$ $\sum a_k(-2i)^k$, c'est à dire P admet une infinité de racines à savoir les $(-2i)$, ce qui entraine que $P = 0$.

II-Intermède

9. **Montrons que q^2 est une racine primitive.**
le groupe des racines $l^{\text{ième}}$ de l'unité est $U_l = \{1, q, , ...q^{l-1}\}$.
On considère l'application $\varphi \begin{array}{ccc} U_l & \longrightarrow & U_l \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$
φ est un morphisme de groupes, en effet $\varphi(xy) = (xy)^2 = x^2y^2 = \varphi(x)\varphi(y)$. De plus si $x \in Ker(\varphi)$, alors $x^2 = 1$ et par suite $x = \pm 1$.
Si $x = -1$, alors $\exists k \in [[0, l-1]]$ tel que $e^{i2k\pi/l} = -1 = e^{i\pi}$, donc $2k \equiv l\ mod(2)$, ce qui contredit que l est impaire.
On conclut que $Ker(\varphi) = \{1\}$, donc φ est morphisme injectif, de plus $card(U_l) < +\infty$n donc φ est bijectif, et par suite $\varphi(U_l) = U_l = \{1, q^2, ..., q^{2(l-1)}\}$.

10. (a) **Calcul de G_a^l et digonalisabilité de G_a.**
-La matrice de G_a est une matrice compagnon associée au polynôme $X^l - a$, donc de polynôme caractéristique $(-1)^l(X^l - a)$, donc $G_a^l = aI_l$.
-Les valeurs propres de G_a sont les racines $l^{\text{ième}}$ de $a \in \mathbb{C}^*$ distinctes deux à deux, donc diagnalisable.

   (b) **Valeurs propres et vecteurs propres de G_a.**
-On a $b^l = a$, donc $Sp(G_a) = \{b, bq, ..., bq^{l-1}\}$.
-Soit $\lambda_k = bq^k$ une valeur propre de G_a et $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{l-1} \end{pmatrix} \in Ker(G_a - \lambda I_l)$, alors

$$\begin{pmatrix} -\lambda_k & 0 & 0 & \dots & a \\ 1 & -\lambda_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda_k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{l-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui entraine que

$x_{l-1} - \lambda_k x_0 = x_0 - \lambda_k x_1 = x_1 - \lambda_k x_2 = ... = x_{l-2} - \lambda_k x_{l-1} = 0$

et par suite $Ker(G_a - \lambda_k I_l) = Vect(u_k)$ où $u_k = \begin{pmatrix} \lambda_k^{l-1} \\ \vdots \\ \lambda_k^2 \\ \lambda_k \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{l-1} \lambda_k^{l-1-i} v_i$

11. **Montrons que P_a est un projecteur.**
-Soit $i \in \mathbb{Z}$ tel que $i = pl+r$ la division euclidienne de i par l, alors $r = 0l+r$ est la division euclidienne de r par l, et par suite $P_a(v_i) = a^p v_r$ et $P_a(v_r) = a^0 v_r = v_r$, ce qui entraine que $P_a^2(v_i) = a^p P_a(v_r) = a_p v_r = P_a(v_i)$, donc $P_a^2 = P_a$.
Image de P_a.
-$Im(P_a) = Vect(P_a(v_i)/i \in \mathbb{Z}) = Vect(a^p v_i / p \in \mathbb{Z} \;\text{ et }\; i \in [[0, l-1]]) = Vect(v_0, ..., v_{l-1}) = W_l$.

III-Opérateurs quantique

12. **Montrons l'équivalence demandée.**
- $HoE = q^2 EoH \iff \forall i \in \mathbb{Z}, HoE(v_i) = q^2 EoH(v_i) \iff \forall i \in \mathbb{Z}, \lambda(i-1)v_{i-1} = q^2\lambda(i)v_{i-1} \iff \forall i \in \mathbb{Z}, \lambda(i-1) = q^2\lambda(i) \iff \forall i \in \mathbb{Z}, \lambda(i) = q^{-2i}\lambda(0)$.
13. **Inversibilité de H.**
- Les $\lambda(i)$ sont non nuls, on considère l'endomorphisme de V défini par $H'(v_i) = \dfrac{1}{\lambda(i)} v_i$.
- On vérifit sans difficulté que $H'oH = HoH' = id_V$.
14. **Montrons l'équivalence demandée**.
- $EoF = FoE + H - H^{-1} \iff \forall i \in \mathbb{Z}, \mu(i)v_i = \mu(i-1)v_i + \lambda(i)v_i - \lambda(i)^{-1}v_i \iff \forall i \in \mathbb{Z}, \mu(i) = \mu(i-1) + \lambda(i) - \lambda(i)^{-1}$
ce qui donne l'égalité souhaitée.
15. (a) **La période de λ et μ divise l.**
- $q^{2l} = 1$, donc $\forall i \in \mathbb{Z}, \lambda(i+l) = \lambda(0)q^{-2i-2l} = \lambda(0)q^{-2i} = \lambda(i)$.
- $\forall i \in \mathbb{Z}, \mu(i) = \mu(0) + \sum_{k=1}^{i}(\mu(k) - \mu(k-1))$, or $\mu(k+l) - \mu(k-1+l) = \lambda(k+l) - \lambda(k+l)^{-1} = \lambda(k) - \lambda(k)^{-1} = \mu(k) - \mu(k-1)$, donc $\mu(i+l) = \mu(i)$.
Ceci entraine λ et μ sont périodiques sur $\mathbb{Z}$ et leur période divise l.
(b) **l est la période de λ.**
q^2 est une racine primitive $l^{\text{ième}}$ de l'unité, donc la période de λ est exactement l.
(c) **l est aussi la période de μ.**
Si $l' \in]0, l[$ est une période de μ, alors $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\lambda(0)q^{-2i-2l'} - \lambda(0)^{-1}q^{2i+2l'} = \lambda(0)q^{-2i} - \lambda(0)^{-1}q^{2i}$, ce qui entraine après calcul que $\forall i \in \mathbb{Z}, -\lambda(0)^2 = q^{4i+2l'}$, donc avec $i = 0$, puis $i = -l'$, on aura $q^{2l'} = q^{-2l'}$, ce qui donne $q^{4l'} = 1$, et par suite l divise $2l'$, l est impair, donc l divise l', ce qui contredit $0 < l' < l$.
16. (a) **Égalité demandée.**

$C = (q - q^{-1})EoF + q^{-1}H + qH^{-1} = (q - q^{-1})(FoE + H - H^{-1}) + q^{-1}H + qH^{-1} =$
$= (q + q^{-1})FoE + qH + q^{-1}H^{-1}$.
(b) **Les v_i sont des vecteurs propres de C.**
Soit $i \in \mathbb{Z}$, alors $C(v_i) = (q + q^{-1})FoE(v_i) + qH(v_i) + q^{-1}H^{-1}(v_i) = ((q - q^{-1})\mu(i-1) + q\lambda(i) + q^{-1}\lambda(i)^{-1})v_i$
donc v_i est un vecteur propre de C.
(c) **Montrons que C est une homothétie.**
Pour cela on va montrer que $R : i \longmapsto (q - q^{-1})\mu(i) + q\lambda(i) + q^{-1}\lambda(i)^{-1}$ est péridique de période 1 ?
-$\forall i \in \mathbb{Z}$, $R(i+1) = (q - q^{-1})\mu(i) + q\lambda(i+1) + q^{-1}\lambda(i+1)^{-1} =$
$= (q - q^{-1})[\mu(i-1) + \lambda(i) - \lambda(i)^{-1}] + qq^{-2}\lambda(i) + q^{-1}q^2\lambda(i)^{-1} =$
$= (q - q^{-1})\mu(i-1) + q\lambda(i) + q^{-1}\lambda(i)^{-1} = R(i)$.
donc $\forall i \in \mathbb{Z}, R(i) = R(0) = (q - q^{-1})\mu(0) + \lambda(0)q^{-1} + \lambda(0)^{-1}q$.

(d) **Une application bijective.**
L'application $z \longmapsto R(\lambda(0), z, q) = (q - q^{-1})z + \lambda(0)q^{-1} + \lambda(0)^{-1}q$
est une transformtion affine et $q^2 \neq 1$, donc $q - q^{-1} \neq 0$, ce qui assure que cette application est bijevtive.

(e) **Une application surjective non injective.**
-Soit l'application $\varphi : z \longmapsto q^{-1}z + qz^{-1} + (q - q^{-1})\mu(0)$ est surjective.
-L'équation $\varphi(z) = z'$ est équivalente à l'équation $z^2 - qzz' + q^2 + (q^2 - 1)\mu(0) = 0$ admet au moins deux solutions dans $\mathbb{C}^*$, donc elle est surjective.
-De plus $\varphi(iq) = \varphi(-iq)$ et $iq \neq -iq$, donc φ n'est pas injective.

IV-Opérateurs quantiques modulaires

17. (a) **Un commutant avec P_a est compatible avec P_a.**
-On a $P_a^2 = P_a$, si de plus ϕ commute avec P_a, alors $P_a o\phi o P_a = P_a^2 o\phi = P_a o\phi$, donc ϕ est compatible avec P_a.

(b) **Compatibilité de H et H^{-1} avec P_a.**
-Soit $i = pl + r \in \mathbb{Z}$ la division euclidienne de i par l.
-$HoP_a(v_i) = H(a^p v_r) = a^p H(v_r) = a^p \lambda(r)v_r = a^p \lambda(r)v_r$.
-$P_a oH(v_i) = P_a(\lambda(i)v_i) = \lambda(i)P_a(v_i) = \lambda(i)a^p v_r$.
or λ est périodique de période l, donc $\lambda(i) = \lambda(r)$, donc $HoP_a = P_a oH$, donc $P_a oH^{-1} = H^{-1}oP_a$, et la question précédente assure que H et H^{-1} sont compatibles avec P_a.

18. **$\mathcal{U}_q$ est une sous-algèbre.**
-Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{U}_q, \alpha \in \mathbb{C}$, et notons θ l'endomorphisme nul de V.
-$P_a o\theta o P_a = P_a o\theta = \theta$, $P_a oid_V oP_a = P_a^2 = P_a = P_a oid_V$.
-$P_a o(\varphi + \alpha\psi)oP_a = P_a o\varphi oP_a + \alpha P_a o\psi oP_a = P_a o\varphi + \alpha P_a o\psi = P_a o(\varphi + \alpha\psi)$.
-$P_a o\varphi o\psi oP_a = (P_a o\varphi)o\psi oP_a = (P_a o\varphi oP_a)o\psi oP_a = (P_a o\varphi)o(P_a o\psi oP_a) = (P_a o\varphi)o(P_a o\psi) =$
$= (P_a o\varphi oP_a)o\psi = P_a o\phi o\psi$.
donc $\mathcal{U}_q$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(V)$.

19. -Soit $i = pl + r$ où $0 \leq r < l$.
Montrons que $E \in \mathcal{U}_q$**.**
- Si $i \neq 0$mod(l), alors $i - 1 = pl + (r - 1)$ où $0 \leq r - 1 < l - 1$ donc $P_a(v_{i-1}) = a^p v_{r-1}$ et par suite
$P_a oEoP_a(vi_) = P_a oE(a^p v_r) = a^p P_a(v_r) = a^p v_{r-1}$.
et $EoP_a(v_i) = P_a(v_{i-1}) = a^p v_{r-1}$, donc $P_a oEoP_a(v_i) = EoP_a(v_i)$.
-Si $i \equiv 0$mod(l), alors $-1 = -1l + (l - 1)$, donc $P_(v_{-1}) = a^{-1}v_{l-1}$ et par suite, $P_a oEoP_a(v_{pl}) = P_a oE(a^p v_0) = a^p P_a(v_{-1}) = a^{p-1}v_{l-1}$ et $P_a oE(v_{pl}) = P_a(v_{pl-1}) = a^{p-1}v_{l-1}$, donc $P_a oEoP_a(v_{pl}) = EoP_a(v_{pl})$.
Montrons que $F \in \mathcal{U}_q$**.**
-Si $i \neq l - 1$mod(l), alors $i + 1 = pl + (r + 1)$ où $1 \leq r + 1 < l$, donc $P_a(v_{i+1}) = a^p v_{r+1}$ et par suite
.$P_a oFoP_a(v_i) = P_a oF(a^p v_r) = a^p \mu(r)P_a(v_{r+1}) = a^p \mu(r)v_{r+1}$

. $P_a oF(v_i) = \mu(i)P_a(v_{i+1}) = a^p \mu(i)v_{r+1}$.
or $\mu(i) = \mu(pl + r) = \mu(r)$, donc $P_a oFoP_a(v_i) = P_a oF(v_i)$.

-Si $i \equiv l - 1$mod(l), alors $i = pl + (l - 1)$ et $i + 1 = (p + 1)l + 0$, donc $P_a(i) = a^p v_{l-1}$ et $P_a(v_{i+1}) = a^{p+1}v_0$ et par suite
. $P_a oFoP_a(v_i) = P_a oF(a^p v_{l-1}) = a^p \mu(l - 1)P_a(v_l) = a^{p+1}\mu(l - 1)v_0$.
. $P_a oF(v_i) = \mu(i)P_a(v_{i+1}) = \mu(i)a^{p+1}v_0$, or $\mu(i) = \mu(pl + l - 1) = \mu(l - 1)$, donc $P_a oFoP_a(v_i) = P_a oF(v_i)$.

20. (a) **Existence et unicité d'un morphisme d'algèbre.**
$\psi_a : \mathcal{U}_q \longrightarrow \mathcal{L}(W_l)$ définit par $\psi_a(\phi) = P_a o\phi oP_a$ est un morphisme d'algèbre.
En effet $\forall \varphi_1, \varphi_1 \in \mathcal{U}_q, \alpha \in \mathbb{C}$
-$\psi(\varphi_1 + \alpha\varphi_2) = P_a o(\varphi_1 + \alpha\varphi_1)oP_a = P_a o\varphi_1 oP_a + \alpha P_a o\varphi_2 oP_a = \psi_a(\varphi_1) + \alpha\psi_a(\varphi_2)$.
-$\psi_a(\phi_1 o\varphi_2) = P_a o(\varphi_1 o\varphi_2)oP_a = (P_a o\varphi_1)o(\varphi_2 oP_a) = (P_a o\varphi_1 oP_a)o(\varphi_2 oP_a) =$
$= (P_a o\varphi_1 oP_a^2)o(\varphi_2 oP_a) = (P_a o\varphi_1 oP_a)o(P_a o\varphi_2 oP_a) = \psi_a(\varphi_1)o\psi_a(\varphi_2)$.
-$\forall i \in [[0, l - 1]]$, $\psi_a(id_V)(v_i) = P_a oid_V oP_a(v_i) = P_a(v_i) = a^0 v_i = v_i$, donc $\psi_a(id_V) = id_V$.
Pour l'unicité, supposons que ψ_a, χ_a deux morphismes d'algèbre qui vérifient l'égalité, alors $\forall \phi \in \mathcal{U}_q$, $(\psi_a - \chi_a)(\phi)oP_a$, c'est à dire $Im(P_a) \subset Ker(\psi_a - \chi_a)(\phi)$, or $Im(P_a) = \mathcal{W}_l$, donc $Ker(\psi_a - \chi_a)(\phi) = \mathcal{W}_l$, donc $(\psi_a - \chi_a)(\phi) = 0$, ceci $\forall \phi \in \mathcal{U}_q$, donc $\psi_a = \chi_a$.

(b) **Équivalence demandée.**
Soit $\phi \in \mathcal{U}_q$.
-$\phi \in Ker(\psi_a) \Longleftrightarrow \psi_a(\phi) = 0_{\mathcal{W}_l}$, or $Im(P_a) = \mathcal{W}_l$, donc $\phi \in Ker(\psi_a) \Longleftrightarrow \psi_a(\phi)oP_a = P_a o\phi = 0 \Longleftrightarrow Im(\phi) \subset Ker(P_a)$, or P_a est une projection, donc $Ker(P_a) = Im(P_a - id_V) = Vect(P_a(v_i) - v_i \ / \ i \in \mathbb{Z}) = Vect(a^p v_r - v_i \ / \ i \in \mathbb{Z})$ où $i = pl + r$ est la division euclidienne de i par l, ce qui entraine le résultat demandé.

21. (a) **Calcul de $\psi_a(E)$.**
On a $-1 = (-1)l+(l-1)$, donc $P_a(v_{-1}) = a^{-1}v_{l-1}$ et par suite $\psi_a(E)(v_0) = \psi_a(E)oP_a(v_0) = P_a oE(v_0) = P_a(v_{-1}) = a^{-1}v_{l-1}$.

(b) **Calcul de $\psi_a(E^l)$.**
$\forall r \in [[1, l-1]]$, $\psi_a(E)(v_r) = \psi_a(E)oP_a(v_r) = P_a oE(v_r) = P_a(v_{r-1}) = v_{r-1}$, donc la matrice de $\psi_a(E)$ dans la base de $(v_0, ..., v_{l-1})$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & O \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ a^{-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = {}^tMat(G_a^{-1})$, donc $\psi_a(E^l) = (\psi_a(E))^l = a^{-1}id_V$.

(c) **Dimension de $\mathbb{C}[\psi_a(E)]$.**
Le polynôme minimal de $\psi_a(E)$ est $\pi_a = X^l - a^{-1}$, donc $dim\mathcal{C}[\psi_a(E)] = deg(\pi_a) = l$.

(d) **Vecteurs propres de $\psi_a(E)$.**
-Les valeurs propres de $\psi_a(E)$ sont les racines l$^{\text{ième}}$ de a^{-1}, c'est à dire $Sp(\psi_a(E)) = \{b^{-1}q^k \ / \ k \in [[0, l-1]]\}$ où b est une racine l$^{\text{ième}}$ de a.
- Un calcul analogue fait dans la question $10-b$ aboutit à que, le vecteur propre associé à $\lambda_k = b^{-1}q^k$ est $u_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \vdots \\ \lambda_k^{l-1} \end{pmatrix}$

22. (a) **W contient l'un des v_i.**
-$\forall r \in [[0, l-1]]$, $\psi_a(H)(v_r) = \psi_a(H)oP_a(v_r) = P_a oH(v_r) = \lambda(r)P_a(v_r) = \lambda(r)v_r = H(v_r)$, donc $\psi_a(H) = H_{|\mathcal{W}_l}$.
- Donc tout sous-espace W non nul de $\mathcal{W}_l$ stable par $\psi_a(H)$ est stable par H, ce qui entraine d'après la question $6-b$, W contient l'un des v_i, $0 \le i < l$.

(b) **Un cas où W coincide avec $\mathcal{W}_l$.**
-$\forall r \in [[1, l-1]]$, $\psi_a(E)(v_r) = \psi_a(E)oP_a(v_r) = P_a oE(v_r) = P_a(v_{r-1}) = v_{r-1}$
-$\psi_a(E)(v_0) = P_a(v_{-1}) = a^{-1}v_{l-1}$, donc $\forall j \in [[0, l-1]]$, $Vect\{\psi_a\psi^n(E)(v_j) \ / \ n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{W}_l$.
-En conclusion si de plus W est stable par $\psi_a(E)$, alors W contient $\mathcal{W}_l$, ce qui entraine que $W = \mathcal{W}_l$.

23. **Condition nécessaire et suffisante de nilpotence de $\psi_a(F)$.**
- Soit $r \in [[\prime, \updownarrow - \infty]]$, $\psi_a(F)(v_r) = \psi_a(F)oP_a(v_r) = P_a oF(v_r) = \mu(r)P_a(v_{r+1})$, donc $\psi_a(F)(v_r) = \mu(r)v_{r+1}$ si $r \in [[0, l-2]]$ et $\psi_a(F)(v_{l-1}) = a\mu(l-1)v_0$.

-La matrice de $\psi_a(F)$ dans la base $(v_0, ..., v_{l-1})$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a\mu(l-1) \\ \mu(0) & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ & \mu(1) & \ddots & 0 & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ O & & & \mu(l-2) & 0 \end{pmatrix}$

donc $\psi_a^l(F) = a\mu(0)\mu(1)...\mu(l-1)id_V$, ce qui entraine que $\psi_a(F)$ est nilpotent
si, et seulement si $\exists r \in [[0, l-1]]$ tel que $\mu(r) = 0$
si, et seulement si $R(\lambda(0), \mu(0), q) = \lambda(0)^{-1}q^{2r+1} + \lambda(0)q^{-2r-1}$.