ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2013 FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – A – (XLC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On se propose d'étudier des algèbres d'endomorphismes remarquables d'espaces vectoriels de dimension infinie.

Préambule

Une racine n-ième de l'unité est dite *primitive* si elle engendre le groupe des racines n-ième de l'unité.

Dans le problème, tous les espaces vectoriels ont pour corps de base le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$. Si $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel, l'algèbre des endomorphismes de $\mathcal{E}$ est notée $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et le groupe des automorphismes de $\mathcal{E}$ est noté $\mathrm{GL}(\mathcal{E})$. On note $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ l'application identité de $\mathcal{E}$. Si $u \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, on note $\mathbf{C}[u]$ la sous-algèbre $\{P(u) \mid P \in \mathbf{C}[X]\}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ des polynômes en u.

On note $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}$. Si f est une fonction de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}$, on note $\mathrm{Supp}(f)$ l'ensemble des $k \in \mathbf{Z}$ tels que $f(k) \neq 0$. On appelle cet ensemble le *support* de f. Dans tout le problème, V désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}$ dont le support est un ensemble fini.

I - Opérateurs sur les fonctions à support fini

1a. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$. Étant donné $f \in \mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$, on définit $E(f) \in \mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$ par $E(f)(k) = f(k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

1b. Montrer que $E \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{\mathbf{Z}})$ et que V est stable par E.

Dans la suite, E désignera uniquement l'endomorphisme de V induit.

2. Montrer que $E \in \mathrm{GL}(V)$.

3. Pour $i \in \mathbf{Z}$, on définit v_i dans $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$ par

$$v_i(k) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = i \ , \\ 0 \text{ si } k \neq i \ . \end{cases}$$

3a. Montrer que la famille $\{v_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ est une base de V.

3b. Calculer $E(v_i)$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$. On définit les applications linéaires $F, H \in \mathcal{L}(V)$ respectivement par

$$H(v_i) = \lambda(i)\, v_i \quad \text{et} \quad F(v_i) = \mu(i)\, v_{i+1}, \quad i \in \mathbf{Z}\ .$$

4. Montrer que $H \circ E = E \circ H + 2E$ si et seulement si pour tout $i \in \mathbf{Z}$, $\lambda(i) = \lambda(0) - 2i$.

Dans la suite de cette partie I (mais pas dans les parties suivantes), on suppose que les conditions de la question 4 sont vérifiées.

5. Montrer que $E \circ F = F \circ E + H$ si et seulement si pour tout $i \in \mathbf{Z}$,

$$\mu(i) = \mu(0) + i(\lambda(0) - 1) - i^2\ .$$

6a. Montrer que pour $f \in V$, l'espace vectoriel engendré par les $H^n(f)$, $n \in \mathbf{N}$, est de dimension finie.

6b. En déduire qu'un sous-espace non réduit à $\{0\}$ de V, stable par H, contient au moins un des v_i.

Dans la suite de cette partie I (mais pas dans les parties suivantes), on suppose que les conditions de la question 5 sont vérifiées et que $\lambda(0) = 0$, $\mu(0) = 1$.

7a. Montrer que $F \in \mathrm{GL}(V)$.

7b. Montrer que E et F ne sont pas d'ordre fini dans le groupe $\mathrm{GL}(V)$.

7c. Calculer le noyau de H et montrer que $H^r \neq \mathrm{Id}_V$ pour $r \geq 1$.

8. On note $\mathbf{C}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients complexes en une indéterminée X.

8a. Montrer que $\mathbf{C}[E]$ est isomorphe (en tant qu'algèbre) à $\mathbf{C}[X]$.

8b. Montrer que $\mathbf{C}[F]$ est isomorphe (en tant qu'algèbre) à $\mathbf{C}[X]$.

8c. Montrer que $\mathbf{C}[H]$ est isomorphe (en tant qu'algèbre) à $\mathbf{C}[X]$.

II - Intermède

Dans toute la suite du problème, on fixe un entier impair $\ell \geq 3$ et q une racine primitive ℓ-ième de l'unité.

9. Montrer que q^2 est une racine primitive ℓ-ième de l'unité.

Soient $W_\ell = \bigoplus_{0 \leq i < \ell} \mathbf{C} v_i$ et $a \in \mathbf{C}^*$.

10. On considère l'élément G_a de $\mathcal{L}(W_\ell)$ dont la matrice dans la base $\{v_i\}_{0\leq i<\ell}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10a. Calculer G_a^ℓ. Montrer que G_a est diagonalisable.

10b. Soit b une racine ℓ-ième de a. Calculer les vecteurs propres de G_a et les valeurs propres associées en fonction de b, q et des v_i.

On définit une application linéaire $P_a : V \to V$ par $P_a(v_i) = a^p v_r$ où pour $i \in \mathbf{Z}$, on définit r et p respectivement comme le reste et le quotient de la division euclidienne i par ℓ ; autrement dit, $i = p\ell + r$ où $0 \leq r < \ell$ et $p \in \mathbf{Z}$.

11. Montrer que P_a est un projecteur d'image W_ℓ.

III - Opérateurs quantiques

12. Montrer que $H \circ E = q^2 E \circ H$ si et seulement si pour tout $i \in \mathbf{Z}$, $\lambda(i) = \lambda(0)q^{-2i}$.

Dans la suite du problème, on suppose que les conditions de la question 12 sont vérifiées et que $\lambda(0) \neq 0$.

13. Montrer que $H \in \mathrm{GL}(V)$.

14. Montrer que $E \circ F = F \circ E + H - H^{-1}$ si et seulement si pour tout $i \in \mathbf{Z}$,

$$\mu(i) = \mu(i-1) + \lambda(0)q^{-2i} - \lambda(0)^{-1}q^{2i}\ .$$

Dans la suite du problème, on suppose que les conditions de la question 14 sont vérifiées.

15a. Montrer que λ et μ sont périodiques sur $\mathbf{Z}$, de périodes divisant ℓ.

15b. Montrer que la période de λ est égale à ℓ.

15c. Montrer que la période de μ est aussi égale à ℓ.

16. Soit $C = (q - q^{-1})E \circ F + q^{-1}H + qH^{-1}$ avec H^{-1} l'inverse de H.

16a. Montrer que $C = (q - q^{-1})F \circ E + qH + q^{-1}H^{-1}$.

16b. Pour $i \in \mathbf{Z}$, montrer que v_i est un vecteur propre de C.

16c. En déduire que C est une homothétie de V dont on calculera le rapport $R(\lambda(0), \mu(0), q)$ en fonction de $\lambda(0)$, $\mu(0)$ et q.

16d. On fixe q et $\lambda(0)$. Montrer que l'application $\mu(0) \mapsto R(\lambda(0), \mu(0), q)$ est une bijection de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}$.

16e. On fixe q et $\mu(0)$. Montrer que l'application $\lambda(0) \mapsto R(\lambda(0), \mu(0), q)$ est une surjection de $\mathbf{C}^*$ sur $\mathbf{C}$ mais pas une bijection.

IV - Opérateurs quantiques modulaires

Soient ℓ, W_ℓ, a, P_a comme dans la partie II. On dit qu'un élément ϕ de $\mathcal{L}(V)$ est *compatible* avec P_a si $P_a \circ \phi \circ P_a = P_a \circ \phi$.

17a. Montrer que si $\phi \in \mathcal{L}(V)$ commute avec P_a, alors ϕ est compatible avec P_a.

17b. Montrer que H et H^{-1} sont compatibles avec P_a.

Soit $\mathcal{U}_q$ l'ensemble des endomorphismes $\phi \in \mathcal{L}(V)$ qui sont compatibles avec P_a.

18. Montrer que $\mathcal{U}_q$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(V)$.

19. Montrer que $E \in \mathcal{U}_q$ et $F \in \mathcal{U}_q$.

20a. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'algèbre $\Psi_a : \mathcal{U}_q \to \mathcal{L}(W_\ell)$ tel que

$$\forall \phi \in \mathcal{U}_q, \quad \Psi_a(\phi) \circ P_a = P_a \circ \phi \; .$$

20b. Montrer que $\phi \in \mathcal{U}_q$ est contenue dans le noyau de Ψ_a si et seulement si l'image de ϕ est dans le sous-espace de V engendré par les vecteurs $v_i - a^p v_r$, $i \in \mathbf{Z}$, où $i = p\ell + r$ est la division euclidienne de i par ℓ.

21. On étudie dans cette question $\Psi_a(E)$.

21a. Déterminer $\Psi_a(E)(v_0)$.

21b. En déduire $\Psi_a(E^\ell)$.

21c. Calculer la dimension du sous-espace vectoriel $\mathbf{C}[\Psi_a(E)]$.

21d. Calculer les vecteurs propres de $\Psi_a(E)$.

22. Soit W un sous-espace non nul de W_ℓ stable par $\Psi_a(H)$.

22a. Montrer que W contient au moins un des vecteurs v_i.

22b. Que dire si W est de plus stable par $\Psi_a(E)$?

23. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $R(\lambda(0), \mu(0), q)$ pour que l'opérateur $\Psi_a(F)$ soit nilpotent.

* *
*