ENS 2013 MP, D

Bernard Randé

Partie I

Lorsque a n'est pas ambigu, on note $\lambda_i(x)$ plutôt que $\lambda_i(x, a)$.

1. On a $P(tv) = t^d P(v)$. Par dérivation par rapport à t,

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial P}{\partial v_i}(tv) = dt^{d-1} P(v).$$

En évaluant en $t = 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial P}{\partial v_i}(v) = dP(v).$$

2. Pour $p = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$,

$$p(ta - x) = t^d a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} + q(t), \text{ avec } \deg q \leqslant d - 1.$$

Par combinaison linéaire, pour p homogène de degré d,

$$p(ta - x) = p(a)t^d + r(t), \text{ avec } \deg r \leqslant d - 1.$$

Comme $p(a) \neq 0$, $\deg_t p(ta - x) = d$. Comme ce polynôme est scindé dans $\mathbb{R}$, il admet d racines réelles, comptées avec multiplicité.

3. • D'après **2**,

$$p(ta - x) = p(a) \prod_{i=1}^{d} (t - \lambda_i(x)).$$

Faisant $t = 0$ et divisant par $(-1)^d$,

$$p(x) = p(a) \prod_{i=1}^{d} \lambda_i(x).$$

• On a, si $s \neq 0$,

$$p(ta - sx) = p(a) \prod_{i=1}^{d} (t - \lambda_i(sx)) = s^d p(a) \prod_{i=1}^{d} (\frac{t}{s} - \lambda_i(x)) = p(a) \prod_{i=1}^{d} (t - s\lambda_i(x)).$$

Si $s > 0$, $\lambda_i(sx) = s\lambda_i(x)$ tandis que si $s < 0$, $\lambda_i(sx) = s\lambda_{d+1-s}(x)$. Si $s = 0$, tous les λ_i sont nuls.

• On a $p(ta - x - sa) = p(a) \prod_{i=1}^{d} (t - s - \lambda_i(x))$. Donc $\lambda_i(x + sa) = s + \lambda_i(x)$.

4. Cette fonction p est homogène de degré m sur $S_m(\mathbb{R})$. Comme $p(tI_m - x)$ est scindé dans $\mathbb{R}$ d'après le théorème spectral et que $p(I_m) = 1$, p est hyperbolique dans la direction I_m.

5. Pour $k = n$, la forme q est strictement positive et ne peut donc s'annuler en dehors de 0. Elle n'est donc pas hyperbolique. Supposons plutôt $k \in [\![1, n-1]\!]$.

• Supposons q hyperbolique dans la direction a, avec d'abord $q(a) > 0$. Alors, pour tout x,

$$q(ta - x) = q(a)t^2 - 2tB(a,x) + q(x)$$

est scindé dans $\mathbb{R}$, donc $B(a,x)^2 \geqslant q(a)q(x)$. Considérons l'ensemble V des x tels que $B(a,x) = 0$. Comme $B(a,a) > 0$, c'est un hyperplan. Si $x \in V$, $q(x) \leqslant 0$. Supposons par l'absurde $k \geqslant 2$. Soit $W = \mathrm{vect}(e_1, e_2)$. Il existe $x \in V \cap W - \{0\}$. Or $q(x) > 0$ car $x \in W$, ce qui est une contradiction. Donc $k = 1$.

En étudiant le cas $q(a) < 0$, par changement de q en $-q$, on voit qu'il est nécessaire que $k \in \{1, n-1\}$.

• Supposons réciproquement que $k = 1$ par exemple. Alors

$$q(te_1 - x) = (t - x_1)^2 - x^2 - \cdots - x_n^2.$$

C'est un polynôme scindé dans $\mathbb{R}$. Donc q est hyperbolique dans la direction e_1. Et de même si $k = n - 1$ (en remplaçant e_1 par e_n).

6. On a

$$\frac{d}{dt} p(ta - x) = (a\nabla p)(ta - x).$$

D'après le théorème de Rolle, ce polynôme est scindé dans $\mathbb{R}$. On a $(a\nabla p)(a) = dp(a) \neq 0$. Enfin, $a\nabla p$ est manifestement homogène de degré $d - 1$.

7. • On sait que

$$\prod_{i=1}^{n}(t - x_i) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{n-k}\Sigma_k(x).$$

Dérivons cette égalité par rapport à x_j :

$$-\prod_{i\neq j}^{n}(t - x_i) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{n-k}\frac{\partial \Sigma_k}{\partial x_j}(x).$$

Multiplions par $t - x_j$:

$$\begin{aligned}
-\prod_{i=1}^{n}(t - x_i) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{n-k+1}\frac{\partial \Sigma_k}{\partial x_j}(x) - x_j \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{n-k}\frac{\partial \Sigma_k}{\partial x_j}(x) \\
&= \sum_{k=-1}^{n-1}(-1)^{k+1} t^{n-k}\frac{\partial \Sigma_{k+1}}{\partial x_j}(x) - x_j \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{n-k}\frac{\partial \Sigma_k}{\partial x_j}(x).
\end{aligned}$$

En identifiant le terme en t^{n-k} et en divisant par $(-1)^{k+1}$,

$$\Sigma_k(x) = \frac{\partial \Sigma_{k+1}}{\partial x_j}(x) + x_j \frac{\partial \Sigma_k}{\partial x_j}(x).$$

Sommons pour j entre 1 et n :

$$n\Sigma_k(x) = (e \cdot \nabla\Sigma_{k+1})(x) + k\Sigma(x)$$

grâce à **1** et au fait que Σ_k est homogène de degré k.

Finalement, $\Sigma_k = \frac{1}{n-k}(e \cdot \nabla\Sigma_{k+1})$ pour $k \leqslant n-1$.

• Raisonnons alors par récurrence descendante. Il est évident que Σ_n est hyperbolique dans la direction e, puisque $\Sigma_n(te - x) = \prod_{i=1}^{n}(t - x_i)$. Si Σ_{k+1} est hyperbolique dans la direction e, alors, d'après **6**, $e \cdot \nabla\Sigma_{k+1}$ l'est aussi, donc Σ_k de même.

8. Supposons F non continue en $\overline{x}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et une suite (x^m) tendant vers $\overline{x}$ tels que $\|F(x^m) - F(\overline{x}\| \geqslant \varepsilon$. Si l'on applique ceci à $m = \varphi(k)$, on obtient une contradiction.

9.a • Soit $P = t^d + a_{d-1}t^{d-1} + \cdots + a_0$ et u une racine de P. Supposons $|u \geqslant 1$. Alors

$$u^d = -a_{d-1}u^{d-1} - \cdots - a_0,$$

donc

$$|u|^d \leqslant (|a_{d-1}| + \cdots + |a_0|)|u|^{d-1}.$$

Par conséquent, $|u| \leqslant M(P)$ avec $M(P) := \max(1, |a_{d-1}| + \cdots + |a_0|)$.

• Soit A tel que, pour tout m, $\|x^m\| \leqslant A$. Posons $P_m(t) := p(ta - x^m) = t^d + a_{d-1}(x_m)t^{d-1} + \cdots + a_0(x^m)$, où $a_0, \ldots, a_{d-1}$ sont continues (polynomiales) sur $\mathbb{R}^n$, donc bornées sur $B'(0, A)$. Il en résulte qu'il existe M' tel que, pour tout m, $M(P_m) \leqslant M'$ et donc, pour tout m et tout i, $|\lambda_i(x^m)| \leqslant M'$.

9.b Soit (x^m) une suite convergeant vers $\overline{x}$. Pour montrer que Λ est continue en $\overline{x}$, il suffit d'après **8** de montrer que l'on peut trouver φ telle que $\Lambda(x^{\varphi(k)}) \to \Lambda(\overline{x})$. Comme la suite $(\Lambda(x^m))$ est bornée dans $\mathbb{R}^d$, espace de dimension finie, il existe φ telle que $\Lambda(x^{\varphi(k)}) \to l \in \mathbb{R}^d$. Par passage à la limite dans les inégalités larges, $l_1 \leqslant \cdots \leqslant l_d$.

D'autre part, $p(ta - x^{\varphi(k)}) \to p(ta - \overline{x})$. Mais, d'un autre côté,

$$p(ta - x^{\varphi(k)}) = \prod_{i=1}^{d}(t - \lambda_i(x^{\varphi(k)})) \to \prod_{i=1}^{d}(t - l_i).$$

Par conséquent, $l_i = \lambda_i(\overline{x})$ (grâce à l'ordonnement), donc $\Lambda(x^{\varphi(k)}) \to \Lambda(\overline{x})$. Ainsi, Λ est continue en $\overline{x}$.

10. • Remarquons que $a \in C(p, a)$ car $p(ta - a) = (t-1)^d p(a)$.

• Si $b \in C(p, a)$, alors, pour $t \in]0, 1[$,

$$\lambda_1((1-t)a + tb) = (1-t) + t\lambda_1(b) > 0.$$

• Si $b \in C(p,a)$, les racines de $t \mapsto (a \cdot \nabla p)(ta-b)$ appartiennent à l'enveloppe convexe de celles de $t \mapsto p(ta-b)$ (d'après Rolle), donc sont strictement positives.

11. • Comme φ_j est continue, il suffit de montrer qu'elle tend vers $\varepsilon\infty$ en $\varepsilon\infty$. On a, pour $u > 0$,

$$\lambda_j(ub+x) = u\lambda_j(b + \frac{x}{u}) \underset{+\infty}{\sim} u\lambda_j(b)$$

par continuité de λ_j et le fait que $\lambda_j(b) > 0$. Donc $\varphi_j(u) \underset{u\to+\infty}{\to} +\infty$.

De même, pour $u < 0$,

$$\lambda_j(ub+x) = u\lambda_{d+1-j}(b + \frac{x}{u}) \underset{-\infty}{\sim} u\lambda_{d+1-j}(b)$$

et donc $\varphi_j(u) \underset{u\to-\infty}{\to} -\infty$.

• Par hypothèse, si $\varphi_j(u) = \varphi_k(u)$ pour $j \neq k$, alors $ub+x$ est colinéaire à a, donc $x \in \mathrm{vect}(a,b)$. Si réciproquement cette condition est réalisée, $x = \alpha a - \beta b$, donc

$$p(ua - (\beta b + x)) = p((u-\alpha)a) = (u-\alpha)^d p(a),$$

donc $\lambda_j(\beta b + x) = \alpha$ pour tout j.

12. • Si $b \in C(p,a)$, $p(b) = p(a) \prod_{i=1}^{d} \lambda_i(b) \neq 0$. On suppose dans la suite b non colinéaire à a.

• Supposons que $x \notin \mathrm{vect}(a,b)$. Pour chaque i, l'équation $\lambda_i(ub+x) = 0$ admet une racine u_i d'après **11** et, si $j \neq i$, $u_i \neq u_j$ (sinon $\varphi_i(u_i) = \varphi_j(u_i)$), donc ces racines sont distinctes.Or

$$p(ub+x) = p(a) \prod_{i=1}^{d} \lambda_i(ub+x),$$

donc $u \mapsto p(ub+x)$ s'annule en les d réels distincts u_i.

• Supposons $x \notin \mathrm{vect}(b)$, mais $x \in \mathrm{vect}(a,b)$. On peut donc écrire $x = \alpha a + \beta b$, avec $\alpha \neq 0$. On a

$$p(ub+x) = p((u+\beta)b+\alpha a) = (u+\alpha)^d p(a) \prod_i (\frac{\alpha}{u+\beta} - \lambda_i(-b,a)) = p(a) \prod_i (\alpha - (u+\beta)\lambda_i(-b,a)),$$

polynôme en u scindé à racines simples.

13. • Supposons d'abord que $x \in \mathrm{vect}(a,b)$. Alors

$$p((ub+x) - ta) = p((u+\beta)b + (\alpha - t)a)p(a) \prod_i ((\alpha - t) - (u+\beta)\lambda_i(-b,a)),$$

d'après le calcul précédent. Les racines de ce polynôme en t sont les

$$\alpha - (u+\beta)\lambda_i(-b,a) = \alpha + (u+\beta)\lambda_{d+1-i}(b,a),$$

qui sont bien des fonctions strictement croissantes de u.

• Supposons à présent que $x \notin \mathrm{vect}(a, b)$.

Considérons le polynôme $p(ta - ub - x)$, de la variable u (pour t fixé). Il est de degré d (car $p(b) \neq 0$). Notons K_j l'ensemble des u tels que $t = \lambda_j(ub+x, a)$. Deux ensembles K_j d'indices distincts sont disjoints, d'après le deuxième alinéa de la question **11**. Chaque K_j est non vide d'après la surjectivité montrée dans la question **11**. Il y a d ensembles K_j et d racines (en u) de l'équation $p(ta - ub - x) = 0$. Il y en a donc exactement une dans chaque K_j, ce qui montre l'injectivité de $u \mapsto \lambda_j(ub + x, a)$.

• L'application $u \mapsto \lambda_j(ub + x, a)$ est injective et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc strictement monotone, et strictement croissant d'après son étude en $+\infty$.

14. • Il est clair que, si $x \in C(p, a)$ et $t > 0$, alors $tx \in C(p, a)$. Soit x et y dans $C(p, a)$ et $t \in]0, 1[$. Puisque tx et $(1 - t)y$ sont dans $C(p, a)$, il suffit de montrer que $x + y \in C(p, a)$.

On a $\lambda_1(x+y, a) \geqslant \lambda_1(y, a)$ d'après **13**, car $x \in C(p, a)$. Donc $\lambda_1(x+y, a) > 0$ car $y \in C(p, a)$.

Ainsi, $C(p, a)$ est un cône convexe.

• Montrons que, si x et y sont dans $C(p, a)$, $\lambda_1(x+y, a) \geqslant \lambda_1(x, a)+\lambda_1(y, a)$.

Posons $\alpha := \lambda_1(x, a)$ et $\beta := \lambda_1(y, a)$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors, $u := x - (\alpha - \varepsilon)a$ et $v := y - (\beta - \varepsilon)b$ sont dans $C(p, a)$, donc $u + v$ aussi, de sorte que

$$\lambda_1(x + y, a) - (\alpha + \beta - 2\varepsilon) > 0.$$

Faisant tendre ε vers 0,

$$\lambda_1(x + y, a) \geqslant \alpha + \beta = \lambda_1(x, a) + \lambda_1(y, a).$$

• Si $t \in]0, 1[$,

$$\lambda_1((1 - t)x + ty, a) \geqslant \lambda_1((1 - t)x) + \lambda_1(ty) = (1 - t)\lambda_1(x, a) + t\lambda_1(y, a),$$

donc $\lambda_1(\cdot, a)$ est une fonction concave.

15. Si $t \leqslant 0$,

$$q(tb - x) = q(a) \prod_i \lambda_i(tb - x, a).$$

Si $t \leqslant 0$, $x - tb \in C(p, a)$ d'après **14**, donc $\lambda_i(tb - x, a) < 0$. Par conséquent, $q(tb-x)$ ne s'annule pas dans $]-\infty, 0]$, et ses racines sont strictement positives. En particulier, $\lambda_1(x, b) > 0$.

16. Soit $x \in C(p, a)$. Alors d'après ce qui précède, $x \in C(p, b)$ et donc $C(p, a) \subset C(p, b)$. En particulier, $a \in C(p, b)$ et, par symétrie, $C(p, a) = C(p, b)$.

17.a Considérons l'ensemble A des couples (i, j) tels que $R(i, j) \neq 0$ (avec $R = \sum_{i,j} R(i, j)x^i y^j$). On a $(m, 0)$ et $(0, p)$ dans A. Considérons les droites issues de $(m, 0)$ joignant un point de A (il y en a au moins une). Leurs pentes sont rationnelles strictement négatives (car $(0,0) \notin A$), et en nombre fini. Soit $-\frac{\alpha}{\beta}$, avec $\mathrm{pgcd}(\alpha,\beta)=1$ et $\beta>0$, $\alpha>0$, la plus grande, de sorte que l'équation de la droite correspondante est $\frac{y}{x-m}=-\frac{\alpha}{\beta}$, ou $\alpha x+\beta y=m\alpha$. Si $(i,j)\in A$, on a donc $\alpha i+\beta j\geqslant m\alpha$ et il existe au moins deux éléments de A tels que $\alpha i+\beta j=m\alpha$. On pose

$$R_0(x,y) := \sum_{\alpha i+\beta j=m\alpha} R(i,j)x^i y^j$$

et

$$R(x,y) := \sum_{\alpha i+\beta j\geqslant m\alpha+1} R(i,j)x^i y^j.$$

On a

$$R_0(x,y) = x^m \sum_{\alpha i+\beta j=m\alpha}^{R} (i,j)y^j x^{i-m}.$$

Or $\beta j=(m-i)\alpha$, donc $j=k\alpha$ et $m-i=k\beta$ pour un certain $k\in\mathbb{N}$ (car $\alpha>0$). Donc

$$R_0(x,y) = x^m \sum_k s_k y^{k\alpha}x^{-k\beta} = x^m Q_0(y^\alpha x^{-\beta})$$

avec

$$Q_0(t) := \sum_k s_k t^k.$$

On a vu que R_0 contient deux termes au moins, dont un terme en x^m, ce qui implique que $Q_0(0)\neq 0$. D'autre part, puis $k\beta=(m-i)\leqslant m$ dans la somme, définissant R_0, on a $\beta\deg Q_0\leqslant m$. Enfin, $(i,j)\mapsto k$ est manifestement injective (puisque nécessairement $j=k\alpha$) et donc le fait qu'il y ait deux termes au moins dans R_0 implique qu'il y en a au moins deux dans Q_0, qui donc n'est pas constant.

17.b Avec les notations du **a**,

$$R(zu^\alpha,u^\beta) = z^m u^{\alpha m}Q_0(z^{-m})+R_1(zu^\alpha,u\beta) = u^{\alpha m}(z^m Q_0(z^{-\beta})+u^{-\alpha m}R_1(zu^\alpha,u\beta)).$$

Posons $\hat{R}(z) := z^m Q_0(z^{-\beta})$. Alors $\hat{R}$ est un polynôme puisque $\beta\deg Q_0\leqslant m$. De plus, $R_1(zu^\alpha,u^\beta)$ est une combinaison linéaire de $z^i u^{\alpha i+\beta j}$ avec $\alpha i+\beta j\geqslant \alpha m+1$, donc $u^{-\alpha m}R_1(zu^\alpha,u^\beta)$ est de la forme $uS(z,u)$. Cela donne la forme indiquée.

Puisque Q_0 admet au moins deux termes, il en va de même de $\hat{R}$ qui, donc, n'est pas constant et admet une racine non nulle.

17.c Si $w\notin\mathbb{R}$, soit $r>0$ tel que $D'(w,r)\subset\mathbb{C}-\mathbb{R}$ et en outre tel que $D'(w,r)$ ne contienne pas d'autre racine de $\hat{R}$. En particulier, $\inf\limits_{|z-w|=r}|\hat{R}(z)| =: \varepsilon>0$. Soit $M := \sup\limits_{(z,u)\in D'(0,r)\times D'(0,1)}|S(z,u)|$. Si $|u|\leqslant\min(\frac{\varepsilon}{2M},1)$, on a $|Mu|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ et donc

$|uS(z,u)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, il existe $z \in D'(0,r)$ tel que $\hat{R}(z)+uS(z,u) = 0$. En particulier, z n'est pas réel et, de plus, $R(zu^\alpha, u^\beta) = 0$.

18.a Si $\hat{R}$ a une racine non réelle, pour $|u|$ assez petit, il existe z non réel tel que $R(zu^\alpha, u\beta) = 0$. Prenons u réel assez petit et non nul. Alors zu^α est réel, ce qui contredit l'hypothèse.

18.b Soit Z l'ensemble des racines de $\hat{R}$ et $z \in Z$. Posons $\omega := e^{\frac{2i\pi}{\beta}}$. On a

$$R(z\omega^\alpha u^\alpha, u^\beta) = u^{\alpha m}(\hat{R}(z\omega^\alpha) + uS(z\omega^\alpha, u)).$$

Donc

$$\frac{R(z\omega^\alpha u^\alpha, u^\beta)}{u^{\alpha m}} = \frac{R(z(u\omega)^\alpha, (u\omega)^\beta)}{(u\omega)^{\alpha m}} \omega^{\alpha m}.$$

Or $\frac{R(zv^\alpha, v^\beta)}{v^{\alpha m}} \underset{v \to 0}{\to} \hat{R}(z) = 0$. Donc

$$\hat{R}(z\omega^\alpha) = 0.$$

Ainsi, $z\omega^\alpha \in Z$. Si donc z est une racine non nulle de $\hat{R}$, réelle par hypothèse, $z\omega^\alpha$ étant encore réel, ω^α est réel. Donc $\frac{2\alpha}{\beta} = k \in \mathbb{Z}$, soit $\beta \mid 2$.

18.c On applique ce qui précède au polynôme $U(x,y) := R(x,-y)$, qui possède les mêmes m, r, α et β. Pour y réel, $U(x,y)$ est scindé dans $\mathbb{R}$. On écrit

$$U(zu^\alpha, u^\beta) = u^{\alpha m}(\hat{U}(z) + uV(z,u)).$$

Soit z une racine non nulle de $\hat{U}$ et $\omega := e^{\frac{i\pi}{\beta}}$. On a

$$U(zu^\alpha, u^\beta)u^{-\alpha m} \underset{u \to 0}{\to} 0.$$

Donc

$$U(z(\omega u)^\alpha, (\omega u)^\beta)u^{-\alpha m} \underset{u \to 0}{\to} 0.$$

Or

$$U(z(\omega u)^\alpha, (\omega u)^\beta)u^{-\alpha m} = U((z\omega^\alpha)u^\alpha, -u^\beta)u^{-\alpha m} = R((z\omega^\alpha)u^\alpha, u^\beta)u^{-\alpha m} \to \hat{R}(z\omega^\alpha).$$

Donc $z\omega^\alpha \in \mathbb{R}$, d'où $\beta \mid \alpha$, soit $\beta = 1$.

18.d On a $(r,0) \in A$ et donc $\beta p = p \geqslant \alpha m \geqslant m$.

19.a On pose $\varphi(s,t) := p(sa-tb-x) = p(a)\prod_i(s-\lambda_i(tb+x,a))$ et $R(X,Y) := p((X+s^*)a - (Y+t^*)b - x) = \varphi(X+s^*, Y+t^*)$. Si t^* est une racine de $t \mapsto \varphi(s^*,t)$, de multiplicité r, 0 est une racine de $R(0,Y)$, de multiplicité r. Notons que $R(0,Y)$ n'est pas le polynôme nul, puisque $p(b) \neq 0$. Soit m la multiplicité de 0 dans $R(X,0)$ (multiplicité nulle si ce n'est pas racine). Notons que $R(X,0)$ n'est pas le polynôme nul (il est de degré d). Si $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto R(x,y)$ est scindé dans $\mathbb{R}$ par hypothèse. D'après **18.d**, $r \geqslant m$.

Il en résulte que la multiplicité m de s^* comme racine de $s \mapsto \varphi(s, t^*)$ est inférieure ou égale à celle de t^* comme racine de $t \mapsto \varphi(s^*, t)$. Il y a donc au plus r indices i tels que $\lambda_i(t^*b + x, a) = s^*$.

19.b Il s'agit de montrer que $t \mapsto p(tb + x)$ est scindé dans $\mathbb{R}$. Remarquons que le résultat de la question **11** n'utilise pas la stricte hyperbolicité.

On note $t_1, \ldots, t_k$ les racines de ce polynôme, t_q étant de multiplicité r_q. On a aussi

$$p(tb + x) = p(a) \prod_{i=1}^{d} \lambda_i(tb + x, a).$$

Pour chaque i, il existe au moins un t tel que $\lambda_i(tb + x, a) = 0$ d'après la question **11**, et ce t est nécessairement l'un des t_q. On en choisit et on regroupe les i correspondant au même t_q, de sorte que

$$d = \sum_q |\{i \ ; \ \lambda_i(t_q b + x, a) = 0\}| \leqslant \sum_q r_q$$

en appliquant **a** à $s^* = 0$. Donc $p(tb + x)$ est scindé dans $\mathbb{R}$.

20.a On sait d'après **19** que p est hyperbolique dans la direction b, donc que

$$p(tb - x) = p(b) \prod_i (x - \lambda_i(x, b)) = p(b)x^d - p(b) \sum_i \lambda_i(x, b)x^{d-1} + \cdots$$

D'un autre côté,

$$p(tb - x) = t^d p(b) - dM(x, b, \cdots, b)t^{d-1} + \cdots$$

par d-linéarité et symétrie. Cela donne le résultat par identification.

20.b *On suppose par la suite que $p(a) > 0$.*
On sait que

$$M(a, b, \ldots, b) = \frac{1}{d} p(b) \sum_i \lambda_i(a, b) \geqslant p(b)(\prod_i \lambda_i(a, b))^{\frac{1}{d}}.$$

Or $p(a) = p(b) \prod_i \lambda_i(a, b)$ d'après **3**. Donc

$$M(a, b) \geqslant p(b)(\frac{p(a)}{p(b)})^{\frac{1}{d}} = p(a)^{\frac{1}{d}} p(b)^{1-\frac{1}{d}}.$$

21. On a

$$p(ta - x) = M(ta - x, \ldots, ta - x)$$

et donc

$$\frac{d}{dt} p(ta-x) = M(a, ta-x, \ldots, ta-x) + \cdots + M(ta-x, \ldots, ta-x, a) = dM(a, ta-x, \ldots, ta-x).$$

D'après Rolle, $\frac{d}{dt}p(ta-x)$ est scindé dans $\mathbb{R}$, ce qui montre le résultat ($p(a) \neq 0$).

22. Raisonnons par récurrence sur d. Lorsque $d = 1$, il n'y a rien à montrer. Supposons le résultat vrai au rang $d-1$. Soit M symétrique homogène de degré d hyperbolique dans la direction a. On suppose toujours $p(a) > 0$. Fixons i. D'après **21**, le polynôme p_i qui à x associe $M(x, \dots, x, x^i, x, \dots, x)$ est homogène de degré $d-1$, hyperbolique dans la direction x^i (car, d'après **19**, si $x^i \in C(p, a)$, p est hyperbolique dans la direction x^i). On a aussi $p(x^i) > 0$.

Il en résulte que

$$M(x^1, \dots, x^d) \geqslant \prod_{j \neq i} p(x_j)^{\frac{1}{d-1}}$$

et donc

$$M(x^1, \dots, x^d)^d \geqslant \prod_j (p(x_j)^{\frac{1}{d-1}})^{d-1}$$

par produit. Donc

$$M(x^1, \dots, x^d) \geqslant \prod_j p(x_j)^{\frac{1}{d}}.$$

23.a Considérons sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ la forme bilinéaire symétrique définie par

$$\Phi((u, \alpha), (v, \beta)) = \alpha\beta - B(u, v),$$

et p la forme quadratique associée à Φ. On sait d'après **5** que p est hyperbolique dans la direction $a = (0, 1)$ telle que $p(a) = 1$. La condition $\alpha^2 - q(u) > 0$ exprime que $p(u, \alpha) > 0$. Vérifions que $x := (u, \alpha) \in C(p, a)$. On a

$$p(ta - x) = t^2 - 2\Phi(a, x)t + p(x).$$

Le produit des racines est > 0 et leur somme, égale à $\Phi(a, x) = \alpha > 0$. Donc $x \in C(p, a)$, et de même $y := (v, \beta) \in C(p, a)$. Donc

$$\Phi(x, y) \geqslant \sqrt{p(x)p(y},$$

soit

$$\alpha\beta - B(u, v) \geqslant \sqrt{(\alpha^2 - q(u))(\beta^2 - q(u))}.$$

23.b On applique directement l'inégalité entre moyenne arithmétique et géométrique. On a

$$\frac{1}{d!}\text{per}\, A \geqslant (\prod_\rho a_{1,\rho(1)} \cdots a_{d,\rho(d)})^{\frac{1}{d!}}.$$

On compte le nombre de fois qu'apparaît dans ce produit un terme $a_{i,j}$. C'est exactement le nombre de permutations telles que $\rho(i) = j$, soit $(d-1)!$. Ainsi,

$$\frac{1}{d!}\operatorname{per} A \geqslant \left(\prod_{i,j} a_{i,j}\right)^{\frac{(d-1)!}{d!}},$$

soit

$$\operatorname{per} A \geqslant d!\left(\prod_{i,j} a_{i,j}\right)^{\frac{1}{d}}.$$

24. On a

$$\begin{aligned} p(x+y) &= M(x+y,\dots,x+y) \\ &= M(x,\dots,x) + \dots + \binom{d}{k} M(y,\dots,y,x,\dots,x,\dots) + \dots + M(y,\dots,y) \end{aligned}$$

où le terme général contient k termes en y. On a utilisé la symétrie de M. Comme x et y sont dans $C(p,a)$, on peut appliquer **22** au d-uplet $(y,\dots,y,x,\dots,x,\dots)$:

$$p(x+y) \geqslant \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} p(x)^{\frac{d-k}{d}} p(y)^{\frac{k}{d}} = (p(x)^{\frac{1}{d}} + p(y)^{\frac{1}{d}})^d.$$

Si $f(x) := p(x)^{\frac{1}{d}}$, on a donc, pour $t \in [0,1]$

$$f((1-t)x + ty) \geqslant f((1-t)x) + f(ty) = (1-t)f(x) + tf(y).$$

25. L'application det est hyperbolique dans la direction I_d (sur $S_d(\mathbb{R})$). De plus, $\det(tI_d - S)$ a ses racines dans $]0,+\infty[$ si et seulement si $S \in S_d^{++}(\mathbb{R})$. Donc $C(\det, I_d) = S_d^{++}(\mathbb{R})$ est un cône convexe, et d'après **24** $S \mapsto (\det S)^{\frac{1}{d}}$ est concave.

26. Si $k = 1$, alors $i = j = 1$ et

$$\lambda_1(x+y) < \lambda_1(x) + \lambda_1(y),$$

ce qui contredit **14**.

27. Soit $\varepsilon > 0$ et $u := x - \varepsilon a$, $v := y - (\lambda_j(y) - \varepsilon)a$. Alors $u + v = (x+y) - \lambda_j(y)$, de sorte que

$$\lambda_k(u+v) - \lambda_i(u) = \lambda_k(x+y) - \lambda_j(y) - \lambda_i(x) + \varepsilon.$$

On choisit déjà ε tel que cette quantité soit < 0.

De plus, pour $r < j$,

$$\lambda_r(v) = \lambda_r(y) - \lambda_j(y) + \varepsilon \leqslant \lambda_{j-1}(y) - \lambda_j(y) + \varepsilon,$$

et on choisit $\varepsilon > 0$ de façon que cette quantité soit strictement négative. En outre, pour $r \geqslant j$,

$$\lambda_r(v) = \lambda_r(y) - \lambda_j(y) + \varepsilon \geqslant \varepsilon > 0.$$

28. • On a

$$\varphi_r(0) = \lambda_r(u) \ ; \ \varphi_r(1) = \lambda_r(u+v)$$

et

$$\varphi_r(t) \underset{+\infty}{\sim} t\lambda_r(v), \ \varphi_r(t) \underset{-\infty}{\sim} t\lambda_{d+1-r}(v).$$

• Notons $A_1, \ldots, A_5$ les ensembles apparaissant dans cet ordre dans la question **29.a**. On note tout de suite que $A_2 = A_3 = \emptyset$. Notons $N(r)$ le nombre de solutions de l'équation $\varphi_r(t) = \lambda^*$.

• Soit $r \in A_1 = [\![j, d+1-j]\!]$.

Premier cas : $r \in A_1 \cap [\![i,k]\!] = A_5$. Alors $\varphi_r(0) \geqslant \lambda_i(u) > \lambda^*$, $\varphi_r(1) \leqslant \lambda_k(u+v) < \lambda^*$, $\varphi_r(+\infty) = +\infty$ et $\varphi_r(-\infty) = -\infty$. Donc $N(r) \geqslant 3$.

Deuxième cas : cas général. Alors $\varphi_r(0) \geqslant \lambda_j(u) \geqslant \lambda_i(u) > \lambda^*$ et $\varphi_(r) = (-\infty)\lambda_{d+1-r}(v) = -\infty$. Donc $N(r) \geqslant 1$.

• Soit $r \in A_4$. On a $\varphi_r(1) = \lambda_r(u+v) \leqslant \lambda_k(u+v) < \lambda^*$. De plus,

$$\varphi_r(+\infty) = (+\infty)\lambda_r(v) = +\infty$$

car $r \geqslant j$, et

$$\varphi_r(-\infty) = (-\infty)\lambda_{d+1-r}(v) = +\infty$$

car $d+1-r < j$. Ainsi, $N(r) \geqslant 2$.

29.a On a obtenu la minoration dans la question **28**.

29.b On a que $d+2-j \geqslant j$, donc $A_4 = [\![d+2-j, k]\!]$. Le reste a déjà été vu.

30. • Si $d+2-j \leqslant k$, on a aussi $d+1-j \leqslant k$ et donc

$$D = d+1-2j+1+2(k-d-2+j+1)+2(d+1-j-i+1) = d+2.$$

• Si $d+1-j \geqslant k$, on a

$$D = d+1-2j+1+2(k-i+1) = d+2.$$

31. Les hypothèses faites au départ sont contradictoires, car un polynôme de degré d ne peut avoir $d+2$ racines. Donc, si $i+j = k+1$, pour tout (x,y), $\lambda_k(x+y) \geqslant \lambda_i(x) + \lambda_j(y)$. Si $l+1 \geqslant i+j$, on a $l \geqslant k$ et, par conséquent,

$$\lambda_l(x+y) \geqslant \lambda_i(x) + \lambda_j(y).$$

32. Cette solution est inspirée d'un article de Denis Serre, de janvier 2008, *Weyl and Lidskii inequalities for general hyperbolic polynomials*,

www.umpa.ens-lyon.fr/~serre/DPF/WL2.pdf

Dans ce qui suit, d et a sont fixés. L'espace vectoriel Hom_d des polynômes homogènes de degré d est de dimension finie, donc toutes les normes y sont équivalentes. On prend comme norme sur Hom_d le suprémum sur la boule unité (de V^d), pour une norme quelconque sur V.

• Soit H l'ensemble des polynômes homogènes de degré d, hyperboliques dans la direction a. On considère $P \in H$ et on fixe i, j et l tels que $l \geqslant i+j-1$. Il s'agit de montrer que $\lambda_l(x+y,P) \geqslant \lambda_i(x,P)+\lambda_j(y,P)$. D'après la question **9**, les fonctions $(x,P) \mapsto \lambda_k(x,P)$ sont continues.

• Supposons montré que, pour $x \notin \mathbb{R}a$ fixé, l'ensemble $SH(x)$ des polynômes P hyperboliques tels que $P(ta-x)$ soit à racines simples est dense dans H. On vérifie facilement que $SH(x)$ est un ouvert (on fixe $d+1$ points intercalés entre les d racines de $P(ta-x)$, et aussi entre les racines extrêmes et les infinis, on constate que, si Q est assez proche de P, $Q(ta-x)$ prend des valeurs de signes alternés et on applique le théorème des valeurs intermédiaires). Ainsi, $SH(x)$ est un ouvert dense de H, fermé de Hom_d (on peut montrer que le complémentaire est ouvert ; si $Q \notin H$, il existe x tel que $Q(ta-x)$ admette une racine complexe non réelle. En appliquant la méthode de **17**, on voit que si R est assez proche de Q, $R(ta-x)$ admet une racine non réelle). Donc H est est complet, donc de Baire.

Soit X une partie dénombrable de $V-\mathbb{R}a$ dense dans V (par exemple, les points à coordonnées rationnelles). D'après le théorème de Baire, $\bigcap_{x\in X} SH(x)$ est dense dans H. Soit (P_k) une suite de $\bigcap_x SH(x)$ convergeant vers P et (x_n), (y_n) des suites d'éléments de X convergeant vers x et y respectivement.

On peut appliquer la question **31** :

$$\lambda_l(x_n+y_n,P_n) \geqslant \lambda_i(x_n,P_n)+\lambda_j(y_n,P_n).$$

Par passage à la limite, on a l'inégalité souhaitée.

• Montrons à présent le résultat admis. Soit $x \notin \mathbb{R}a$. Soit φ une forme linéaire non nulle s'annulant en a, mais pas en x. On la prend de norme d'opérateur égale à 1.

Posons $C := \frac{1}{\|(a\cdot\nabla)P\|}$. Considérons $\varepsilon > 0$ et le polynôme

$$Q(y) := P(y) + C\varepsilon\varphi(y)(a.\nabla)P(y),$$

qui est bien homogène de degré d. On a

$$Q(ta-x) = P(ta-x) - \varepsilon\varphi(x)(a.\nabla)P(ta-x).$$

Notons e le nombre de racines simples de $Q(ta-x)$.

Déjà, ce polynôme est scindé dans $\mathbb{R}$ car

$$Q(ta-x) = \psi(t) + \lambda\psi'(t) = e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}\psi(t))$$

où $\psi(t) := P(ta - x)$. On applique ensuite le théorème de Rolle (en utilisant un point à l'infini). On suppose à présent que $\lambda \neq 0$. Notons e le nombre de racines simples de $Q(ta - x)$. On constate par application de Rolle que le nombre de racines simples de $Q(ta - x)$ est au moins égal à $e + 1$. Montrons alors par récurrence descendante sur e que l'ensemble des polynômes strictement hyperboliques est dense dans l'ensemble des polynômes hyperboliques tels que $P(ta-x)$ ait au moins e racines distinctes. Soit P un polynôme de cet ensemble. Si $e = d$, P est déjà strictement hyperbolique. Supposons le résultat au rang $e + 1$. Soit P tel que $P(ta - x)$ ait au moins e racines simples. Alors, avec les notations ci-dessus, on choisit R strictement hyperbolique tel que $\|Q - R\| \leqslant \varepsilon$. Or $\|P - Q\| \leqslant C\varepsilon \,|||\, \varphi \,|||\, |a \cdot \nabla P\| = \varepsilon$. Donc $\|P - R\| \leqslant 2\varepsilon$, ce qui permet de conclure.