École Normale Supérieure

Concours d'admission 2013 **Filière MP**

Composition de Mathématiques D – (U)

(Durée : 6 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Sujet saisi par Michel Quercia (`michel.quercia@prepas.org`*) d'après l'original.*

* * *

Polynômes hyperboliques

Préambule

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathrm{Pol}(\mathbb{K}^n)$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbb{K}^n$, dont la base canonique est constituée des fonctions monômes $x \mapsto x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, où $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots x_n$ sont les coordonnées de x. Par convention, on aura toujours $x_j^0 = 1$, même lorsque $x_j = 0$. L'écriture d'une fonction polynomiale comme combinaison linéaire de fonctions monômes étant unique, on utilisera par la suite les mots *monôme* et *polynôme* pour désigner des fonctions monômes ou polynomiales.

Le *degré* du monôme $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ est l'entier $m_1 + \dots + m_n$. Un polynôme $P \in \mathrm{Pol}(\mathbb{K}^n)$ est dit *homogène* de degré d s'il est combinaison linéaire des monômes de degré d. Les polynômes homogènes de degré d sur $\mathbb{K}^n$ forment donc un espace vectoriel que l'on note $\mathrm{Hom}_d(\mathbb{K}^n)$. Par exemple, $\mathrm{Hom}_2(\mathbb{K}^n)$ est l'ensemble des formes quadratiques sur $\mathbb{K}^n$.

Si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n, le choix d'une base $\mathcal{B}$ de V permet d'identifier V à $\mathbb{K}^n$; on peut donc parler de polynômes et de polynômes homogènes sur V. On admettra que ces deux notions sont indépendantes du choix de $\mathcal{B}$, et on notera $\mathrm{Pol}(V)$ (respectivement $\mathrm{Hom}_d(V)$) l'espace vectoriel formé des polynômes (respectivement des polynômes homogènes de degré d) sur V.

Si $j, k \in \mathbb{Z}$ sont deux entiers, on notera $[\![j, k]\!]$ l'ensemble des entiers $i \in \mathbb{Z}$ tels que $j \leqslant i \leqslant k$. Si $k < j$, $[\![j, k]\!]$ est donc vide.

1) Si $P \in \mathrm{Hom}_d(\mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathbb{R}^n$, calculer $\sum_{j=1}^n v_j \dfrac{\partial P}{\partial x_j}(v)$ en fonction de $P(v)$.

Le problème traite des polynômes *hyperboliques*. Soit V un espace vectoriel réel de dimension $n \geqslant 1$, soient $d \geqslant 1$ un entier et $a \in V$ un vecteur non nul ; on dit qu'un polynôme homogène p de degré d sur V (donc un élément de $\mathrm{Hom}_d(V)$) est *hyperbolique dans la direction* a si d'une part $p(a) \neq 0$, et d'autre part, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, les racines du polynôme à une variable

$$t \mapsto p(ta - x)$$

sont réelles. Remarquons que si $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, p est encore hyperbolique dans la direction de sa ; ce qui explique l'emploi du mot *direction* dans la terminologie ci-dessus.

2) Vérifier que dans cette définition, les racines de $t \mapsto p(ta - x)$, comptées avec leurs multiplicités, sont au nombre de d.

Ces racines seront notées $\lambda_1(x, a), \dots, \lambda_d(x, a)$ et rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1(x, a) \leqslant \dots \leqslant \lambda_d(x, a).$$

3) Exprimer $p(x)$ au moyen de $p(a)$ et des $\lambda_j(x, a)$. Si $s \in \mathbb{R}$, exprimer en fonction du signe de s les $\lambda_j(sx, a)$ et les $\lambda_j(x + sa, a)$ au moyen des $\lambda_j(x, a)$.

I Exemples

4) Montrer que la fonction $S \mapsto \det(S)$ est un polynôme homogène sur l'espace $\mathrm{Sym}_m(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles à m lignes et m colonnes, et que ce polynôme est hyperbolique dans une direction convenable.

5) Pour quelles valeurs de l'entier k compris entre 1 et n, la forme quadratique

$$q(x) = \sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \sum_{j=k+1}^{n} x_j^2$$

est-elle hyperbolique sur $\mathbb{R}^n$, dans une direction convenable ?

6) Si $d \geqslant 2$ et si $p \in \mathrm{Hom}_d(V)$ est hyperbolique dans une direction a, montrer que la formule

$$x \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial p}{\partial x_j}(x)$$

définit un polynôme hyperbolique dans la même direction. On notera ce polynôme $a \cdot \nabla p$.

7) Soit $n \geqslant 2$ et $d \in [\![1, n]\!]$ des entiers. On définit sur $\mathbb{R}^n$ de d-ème *polynôme symétrique élémentaire* Σ_d comme suit

$$\Sigma_d(x) = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_d \leqslant n} x_{j_1} \ldots x_{j_d}.$$

Montrer que Σ_d est hyperbolique dans la direction $e = (1, \ldots, 1)$.

II Continuité des racines

8) Soit n et d deux entiers strictement positifs, et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ une fonction. On se donne un élément $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^n$. On suppose que, pour toute suite (x^m) dans $\mathbb{R}^n$ qui converge vers $\bar{x}$, il existe une sous-suite $(x^{\varphi(k)})$ (avec φ strictement croissante) telle que la suite $(F(x^{\varphi(k)}))$ converge vers $F(\bar{x})$. Montrer que F est continue en $\bar{x}$.

9) Soit $p \in \mathrm{Hom}_d(V)$ un polynôme hyperbolique dans une direction a, où $d \geqslant 1$ et $\dim(V) = n \geqslant 1$. On définit l'application

$$\Lambda : \begin{cases} V & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ x & \longmapsto & (\lambda_1(x, a), \ldots, \lambda_d(x, a)). \end{cases}$$

a) Si une suite (x^m) de V est bornée, montrer que les suites $(\lambda_j(x^m, a))$ sont bornées elles-aussi.

b) En utilisant la question **8)**, montrer que Λ est continue.

III Le cône du futur

Si $p \in \mathrm{Hom}_d(V)$ est hyperbolique dans la direction a, on désigne par $C(p, a)$ l'ensemble des vecteurs $x \in V$ qui satisfont $\lambda_1(x, a) > 0$.

10) Vérifier que $C(p, a)$ est étoilé par rapport à a. Montrer que $C(a \cdot \nabla p, a) \supset C(p, a)$.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que pour tout x non colinéaire à a, on a les inégalités strictes

$$\lambda_1(x, a) < \ldots < \lambda_d(x, a),$$

et on dit alors que p est *strictement hyperbolique dans la direction a.*

11) Soit $b \in C(p, a)$ et $x \in V$. Si $j \in [\![1, d]\!]$, montrer que la fonction

$$\varphi_j : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda_j(tb + x, a) \end{cases}$$

est surjective. Lorsque $d \geqslant 2$, à quelle condition existe-t-il deux indices distincts j et k et un nombre $t \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi_j(t) = \varphi_k(t)$?

12) En déduire que p est strictement hyperbolique dans la direction b.
13) Montrer que les φ_j sont strictement croissantes.
14) Soit $x, y \in V$. Montrer que $t \mapsto \lambda_1(ty + x, a) - t\lambda_1(y, a)$ est croissante. En déduire que $x \mapsto \lambda_1(x, a)$ est concave et que $C(p, a)$ est un cône convexe.
15) Soit $x, b \in C(p, a)$. Montrer que $\lambda_1(x, b) > 0$.
16) En déduire que si $b \in C(p, a)$ alors $C(p, b) = C(p, a)$.

IV Le cas général

On admet dans cette partie l'énoncé suivant (légèrement moins précis qu'un *lemme de Rouché*) :

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ un nombre complexe et $\varepsilon > 0$ un nombre réel. On suppose que $P(\omega) = 0$ et que

$$\sup\{|Q(z)| \; ; |z - \omega| = \varepsilon\} < \inf\{|P(z)| \; ; |z - \omega| = \varepsilon\}.$$

Alors $P + Q$ a au moins une racine ω' telle que $|\omega' - \omega| < \varepsilon$.

17) Soit $R = R(x, y) \in \mathrm{Pol}(\mathbb{C}^2)$ un polynôme s'annulant en $(0, 0)$. On suppose que le polynôme $x \mapsto R(x, 0)$ n'est pas nul et on note m la multiplicité de sa racine $x = 0$. De même, on suppose que le polynôme $y \mapsto R(0, y)$ n'est pas nul et on note r la multiplicité de sa racine $y = 0$.

a) Montrer qu'il existe des entiers $\alpha, \beta > 0$ premiers entre eux, et deux polynômes R_0 et R_1 vérifiant les conditions suivantes :
- $R(x, y) = R_0(x, y) + R_1(x, y)$;
- $R_0(x, y) = x^m Q_0(y^\alpha / x^\beta)$, où $Q_0 \in \mathbb{C}[X]$ vérifie $0 < \beta \deg(Q_0) \leqslant m$;
- R_1 est une combinaison linéaire de monômes $x^i y^j$ pour lesquels $\alpha i + \beta j \geqslant \alpha m + 1$.

Vérifier que $Q_0(0) \neq 0$.

b) Monter qu'il existe des polynômes $\widehat{R} \in \mathbb{C}[X]$ et $S \in \mathrm{Pol}(\mathbb{C}^2)$ satisfaisant l'identité

$$R(zu^\alpha, u^\beta) = u^{\alpha m}(\widehat{R}(z) + uS(z, u)).$$

Montrer de plus que $\widehat{R}$ possède une racine $\omega \neq 0$.

c) Si ω n'est pas réelle, montrer que pour tout $u \in \mathbb{C}$ assez petit, il existe $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ tel que $R(zu^\alpha, u^\beta) = 0$.

18) On reprend les notations de la question précédente et on suppose que lorsque y est réel, les racines de $R(x, y)$ sont toutes réelles.

a) Montrer que les racines de $\widehat{R}$ sont toutes réelles.

b) Montrer que l'ensemble des racines de $\widehat{R}$ est stable par multiplication par $e^{2i\alpha\pi/\beta}$. En déduire que $\beta \leqslant 2$.

c) En considérant aussi les points de la forme $(zu^\alpha, -u^\beta)$, montrer qu'en fait $\beta = 1$.

d) En déduire que $r \geqslant m$.

19) Soit p un polynôme homogène de degré $d \geqslant 1$ sur un espace vectoriel réel V de dimension $n \geqslant 2$, hyperbolique dans la direction de $a \neq 0$. *On ne suppose pas que* p *soit strictement hyperbolique.* On se donne $b \in C(p, a)$.

a) Soit $x \in V$ et $s^* \in \mathbb{R}$; on utilise les fonctions φ_j définies à la question **III-11)**. Soit t^* une racine réelle de $t \mapsto p(s^* a - tb - x)$, de multiplicité r. Montrer qu'au plus r d'entre les fonctions φ_j prennent la valeur s^* en t^*.

b) En déduire que p est hyperbolique dans la direction b.

Les preuves des autres résultats de la partie **III** restant valables, on pourra utiliser par la suite le fait que
- $x \mapsto \lambda_1(x, a)$ est concave et $C(p, a)$ est un cône convexe ;
- si $b \in C(p, a)$, alors $C(p, b) = C(p, a)$.

V L'inégalité de Gårding sur le cône $C(p, a)$

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie n et $d \geqslant 2$ un entier. Une application

$$M : V^d = \underbrace{V \times \ldots \times V}_{d \text{ copies}} \to \mathbb{R}$$

est dite *symétrique* si

$$M(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(d)}) = M(x_1, \ldots, x_d),$$

pour tous vecteurs $x_1, \ldots, x_d \in V$ et pour toute permutation σ de $[\![1, n]\!]$.
Une *forme* d*-linéaire symétrique* est une application M comme ci-dessus, qui satisfait de plus

$$M(\lambda x_1 + \mu y_1, x_2, \ldots, x_d) = \lambda M(x_1, x_2, \ldots, x_d) + \mu M(y_1, x_2, \ldots, x_d),$$

pour tous vecteurs $y_1, x_1, \ldots, x_d \in V$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Soit M une forme d-linéaire symétrique. La fonction p définie par

$$p(x) = M(x, \ldots, x), \quad \forall x \in V$$

est alors polynomiale, homogène de degré d. On suppose que p est hyperbolique dans la direction de a, un vecteur non nul.

20) Soit $b \in C(p, a)$.

a) Prouver l'identité $dM(x, b, \ldots, b) = p(b) \sum_{j=1}^{d} \lambda_j(x, b)$, $\forall x \in V$.

b) En déduire que $M(a, b, \ldots, b) \geqslant p(a)^{1/d} p(b)^{(d-1)/d}$.
On pourra admettre sans démonstration *l'inégalité arithmético-géométrique :* si $u_1, \ldots, u_d$ sont des nombres réels positifs, alors

$$\frac{1}{d}(u_1 + \ldots + u_d) \geqslant (u_1 \ldots u_d)^{1/d}.$$

21) Vérifier que $x \mapsto M(a, x, \ldots, x)$ est un polynôme hyperbolique sur V, dans la direction de a.

22) Montrer que pour tout choix des vecteurs $x^1, \ldots, x^d$ dans $C(p, a)$, on a

$$M(x^1, \ldots, x^d) \geqslant \prod_{j=1}^{d} p(x^j)^{1/d}.$$

On pourra faire un raisonnement par récurrence sur le degré d.

23) Applications :

a) Soit $m \geqslant 1$ et B la forme polaire d'une forme quadratique q définie positive sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathbb{R}^n$. Si $\alpha > \sqrt{q(u)}$ et $\beta > \sqrt{q(v)}$, montrer que

$$\alpha\beta - B(u, v) \geqslant \sqrt{(\alpha^2 - q(u))(\beta^2 - q(v))}.$$

b) Si $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est une matrice carrée, on définit son *permanent*

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{\rho \in \mathrm{Bij}_d} a_{1\rho(1)} \ldots a_{d\rho(d)},$$

où Bij_d désigne l'ensemble des bijections de $\{1, \ldots, d\}$ dans lui-même. Si A est à coefficients positifs, montrer l'inégalité

$$\mathrm{per}(A) \geqslant (d!) \Big(\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant d} a_{ij} \Big)^{1/d}.$$

VI Concavité de $p^{1/d}$ sur le cône $C(p, a)$

On reprend les notations de la partie **V**. On pourra admettre que pour tout polynôme homogène p de degré d sur V, il existe une forme d-linéaire symétrique M sur V telle que $p(x) = M(x, \dots, x)$ pour tout x dans V.

24) Soit $x, y \in C(p, a)$. En exprimant $p(x + y)$ au moyen de M, montrer que

$$p(x + y) \geqslant (p(x)^{1/d} + p(y)^{1/d})^d.$$

En déduire que la fonction $x \mapsto p(x)^{1/d}$ est concave sur $C(p, a)$.

25) Montrer que l'ensemble des matrices symétriques définies positives à d lignes et d colonnes est un cône convexe, sur lequel l'application $S \mapsto (\det S)^{1/d}$ est concave.

VII Inégalités de Weyl

On considère dans cette partie un polynôme homogène p sur un espace vectoriel V de dimension $n \geqslant 3$. On suppose que p est strictement hyperbolique (voir **III** pour cette notion) dans la direction de a, de degré $d \geqslant 2$. Comme on ne considérera pas d'autre direction d'hyperbolicité que a, on notera $\lambda_r(x)$ au lieu de $\lambda_r(x, a)$. On se donne trois indices $i, j, k \in [\![1, d]\!]$ vérifiant $j \leqslant i$ et $k + 1 = i + j$. On suppose, jusqu'à la question **30** qu'il existe deux vecteurs $x, y \in V$ tels que

$$\lambda_k(x + y) < \lambda_i(x) + \lambda_j(y).$$

26) Montrer que nécessairement, $k \geqslant 2$.

27) Montrer qu'il existe $u, v \in V$ satisfaisant

$$\lambda_k(u + v) < \lambda_i(u), \qquad \lambda_r(v) < 0 \text{ si } r < j, \qquad \lambda_r(v) > 0 \text{ si } r \geqslant j.$$

28) On choisit un élément λ^* de l'intervalle $]\lambda_k(u + v), \lambda_i(u)[$, et on considère les fonctions $\varphi_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $\varphi_r(t) = \lambda_r(u + tv)$, $r \in [\![1, d]\!]$. En examinant les valeurs de φ_r en $t = 0$, $t = 1$ et au voisinage de $\pm\infty$, donner un minorant du nombre de solutions de l'équation $\varphi_r(t) = \lambda^*$. Ce minorant dépend de l'indice r.

29) **a)** En déduire que le nombre de racines du polynôme $t \mapsto p(\lambda^* a - u - tv)$ est minoré par

$$\begin{aligned} D = \quad & \operatorname{card}([\![j, d]\!] \cap [\![1, d + 1 - j]\!]) \\ + \quad & \operatorname{card}([\![1, j - 1]\!] \cap [\![d + 2 - j, d]\!]) \\ + \, & 2 \operatorname{card}([\![1, j - 1]\!] \cap [\![1, d + 1 - j]\!] \cap [\![i, d]\!]) \\ + \, & 2 \operatorname{card}([\![j, d]\!] \cap [\![d + 2 - j, d]\!] \cap [\![1, k]\!]) \\ + \, & 2 \operatorname{card}([\![j, d]\!] \cap [\![1, d + 1 - j]\!] \cap [\![i, k]\!]). \end{aligned}$$

b) Simplifier cette identité en

$$D = \operatorname{card}([\![j, d + 1 - j]\!]) + 2 \operatorname{card}([\![d + 2 - j, k]\!]) + 2 \operatorname{card}([\![j, d + 1 - j]\!] \cap [\![i, k]\!]).$$

30) Montrer que $D = d + 2$.

31) Finalement, en conclure que si des entiers $i, j, \ell \in [\![1, d]\!]$ sont tels que $\ell \geqslant i + j - 1$, alors on a

$$\lambda_\ell(x + y) \geqslant \lambda_i(x) + \lambda_j(y), \qquad \forall x, y \in V.$$

32) Cette inégalité est-elle encore vraie lorsque le polynôme hyperbolique p n'est pas strictement hyperbolique ?

* *
*

Corrigé

Préambule

1) Décomposer P en monômes. On obtient $\sum_{j=1}^{n} v_j \dfrac{\partial P}{\partial x_j}(v) = dP(v)$.

2) $p(ta-x) = \sum_m \lambda_m (ta_1 - x_1)^{m_1} \dots (ta_n - x_n)^{m_n} = t^d p(a) +$ (termes de degré inférieur). Donc $p(ta-x)$ est de degré d en t ; il admet exactement d racines dans $\mathbb{C}$ et on sait qu'elles sont réelles.

3) $p(ta-x) = p(a)(t - \lambda_1(x,a)) \dots (t - \lambda_d(x,a))$ donc $p(-x) = (-1)^d p(a) \prod_{j=1}^{d} \lambda_j(x,a)$ et

$$p(x) = (-1)^d p(-x) = p(a) \prod_{j=1}^{d} \lambda_j(x,a).$$

Pour $s \neq 0$,

$$\begin{aligned} p(a) \prod_j (t - \lambda_j(sx,a)) &= p(ta - sx) \\ &= s^d p((t/s)a - x) \\ &= s^d p(a) \prod_j ((t/s) - \lambda_j(x,a)) \\ &= p(a) \prod_j (t - s\lambda_j(x,a)). \end{aligned}$$

Par identifications des factorisations de $p(ta-x)$, les listes $(\lambda_j(sx,a))$ et $(s\lambda_j(x,a))$ coïncident à l'ordre près, ce qui donne :

$$\lambda_j(sx,a) = s\lambda_j(x,a) \text{ si } s > 0, \quad \lambda_j(sx,a) = s\lambda_{d+1-j}(x,a) \text{ si } s < 0, \quad \lambda_j(sx,a) = 0 \text{ si } s = 0.$$

On obtient de même $\lambda_j(x + sa, a) = \lambda_j(x,a) + s$.

I Exemples

4) C'est un polynôme homogène de degré m vu la formule développée du déterminant. Il est hyperbolique dans la direction de I (matrice identité) d'après le théorème spectral.

5) $q(ta-x) = t^2 q(a) - 2tf(a,x) + q(x)$ où f est la forme bilinéaire symétrique polaire de q. On a des racines réelles si et seulement si le discriminant est positif ou nul, soit $f^2(a,x) \geqslant q(a)q(x)$.

Soit a tel que $q(a) > 0$ et $H = \{x \text{ tq } f(a,x) = 0\}$. C'est un hyperplan supplémentaire de $\langle a \rangle$ (l'espace vectoriel engendré par a) et on veut entre autres $q(a)q(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in H$. En notant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, il est nécessaire que $H \cap \langle e_1, \dots, e_k \rangle = \{0\}$. Ces deux espaces sont alors en somme directe ce qui implique par calcul de dimension : $k \leqslant 1$ donc $k = 1$. Réciproquement, avec $k = 1$, $q(te_1 - x) = (t - x_1)^2 - (x_2^2 + \dots + x_n^2)$ admet bien deux racines réelles donc q est hyperbolique dans la direction de e_1.

Pour a tel que $q(a) < 0$, on trouve de même que si q est hyperbolique dans la direction de a alors $k + 1 = n$ (donc $n \geqslant 2$), et lorsque cette condition est satisfaite, q est hyperbolique dans la direction de e_n.

En conclusion, q est hyperbolique dans une direction convenable si et seulement si $k = 1$ ou $k = n - 1$.

6) $q(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \dfrac{\partial p}{\partial x_j}(x)$ est bien un polynôme en x homogène de degré $d-1$, non nul en a (cf. **P-1)**), et on a par différentiation composée : $q(ta-x) = \dfrac{d}{dt}(p(ta-x))$. Notons $t_1 < \dots < t_k$ les racines sans répétition de $t \mapsto p(ta-x)$, de multiplicités $m_1, \dots, m_k$. Avec le théorème de Rolle, $t \mapsto q(ta-x)$ admet une racine dans chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, et de plus t_i est aussi racine de ce polynôme avec la multiplicité

$m_i - 1$ lorsque $m_i \geqslant 2$. On a ainsi trouvé $(k-1)+(m_1-1)+\ldots+(m_k-1) = m_1+\ldots+m_k-1 = d-1$ racines pour $t \mapsto q(ta-x)$, ce qui prouve l'hyperbolicité.

7) Itération de **6)** à partir du polynôme $q(x) = x_1 \ldots x_n$, manifestement hyperbolique dans la direction de e.

II Continuité des racines

8) Si $F(x) \underset{x\to\bar{x}}{\not\longrightarrow} F(\bar{x})$ on peut trouver $\varepsilon > 0$ et une suite (x^m) convergeant vers $\bar{x}$ telle que $\|F(x^m) - F(\bar{x})\| \geqslant \varepsilon$ pour tout m. C'est en contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé.

9) **a)** $p(ta-x) = t^d p(a) + \text{polynôme}(t,x) = t^d p(a)(1 + \text{polynôme}(1/t, x))$.

x variant dans un ensemble borné, il existe M tel que pour tout x et pour tout t avec $|t| \geqslant 1$, on a

$$|p(ta-x)| \geqslant |t|^d |p(a)|(1 - M/|t|).$$

En particulier, pour $|t| \geqslant 1$ et $|t| > M$, t n'est pas racine. Ainsi, pour tout x (dans un ensemble borné) et pour tout j, on a $|\lambda_j(x,a)| \leqslant \max(1, M)$.

b) On suppose $x^m \to x$ et on extrait une sous-suite $(x^{\varphi(k)})$ telle que pour tout j, la suite $\lambda_j(x^{\varphi(k)}, a)$ est convergente, de limite μ_j. Les limites croissent avec j comme le font les $\lambda_j(x^{\varphi(k)}, a)$ à k fixé.
Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé on a $p(ta - x^{\varphi(k)}) = p(a)\prod_j (t - \lambda_j(x^{\varphi(k)}, a)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} p(a)\prod_j (t-\mu_j)$. p est continue car polynomiale, donc cette limite est égale à $p(ta-x)$, ce qui prouve que $\mu_j = \lambda_j(x,a)$ pour tout j. On peut alors conclure à la continuité de Λ avec **8)**.

III Le cône du futur

10) $\lambda_1((1-t)a+tx, a) = 1-t+\lambda_1(tx,a) = 1-t+t\lambda_1(x,a) > 0$ pour $t \in [0,1]$ et $x \in C(p,a)$. Ceci prouve le caractère étoilé par rapport à a. On a vu en **I-6)** que les racines de $t \mapsto a \cdot \nabla p(ta-x)$ sont comprises entre les deux racines extrêmes de $t \mapsto p(ta-x)$, en particulier elles sont toutes strictement positives si $\lambda_1(x,a) > 0$, d'où l'inclusion $C(a \cdot \nabla p, a) \supset C(p,a)$.

11) Pour $t > 0$, $\lambda_j(tb+x, a) = t\lambda_j(b + x/t, a) = t\lambda_j(b,a) + \underset{t\to+\infty}{o}(t)$ par continuité de $\lambda_j(.,a)$ en b. Donc $\varphi_j(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On montre de même que $\varphi_j(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Par continuité, l'image de φ_j est un intervalle ; c'est $]-\infty, +\infty[$.

$\varphi_j(t) = \varphi_k(t)$ avec $j \neq k$ implique que $tb + x$ soit colinéaire à a, soit $x \in \langle a, b\rangle$. Réciproquement, si $x = \alpha a + \beta b$ alors $\varphi_j(-\beta) = \lambda_j(\alpha a, a) = \alpha$, indépendant de j.

12) Avec **P-3)**, on a $p(b) = p(a)\prod_{j=1}^d \lambda_j(b,a)$ donc $p(b) \neq 0$. Ensuite, $p(tb+x) = p(a)\prod_{j=1}^d \varphi_j(t)$ s'annule à chaque fois qu'une des fonctions φ_j s'annule.

Si $x \notin \langle a, b\rangle$, les φ_j ont chacune au moins une racine et n'ont pas de racine en commun, donc le polynôme $t \mapsto p(tb+x)$ admet au moins d racines réelles distinctes.

Si $x = \alpha a + \beta b$, on a $\lambda_j(tb+x, a) = \lambda_j((t+\beta)b + \alpha a, a) = (t+\beta)\lambda_k(b,a) + \alpha$ avec $k = j$ si $t \geqslant \beta$ et $k = d+1-j$ si $t < -\beta$. Les racines de $t \mapsto p(tb+x)$ sont donc les réels $-\beta - \alpha/\lambda_k(b,a)$, $k \in [\![1, d]\!]$ (elles sont toutes du même côté de $-\beta$, côté fonction du signe de α). Elles sont distinctes lorsque $\alpha \neq 0$ et $b \notin \langle a\rangle$ par stricte hyperbolicité de p dans la direction a.

Il reste à étudier les cas $x = \beta b$ et $x = \alpha a + \beta b$ avec $b \in \langle a\rangle$. Dans ces deux cas, x est colinéaire à b et $t \mapsto p(tb+x)$ admet d racines confondues.

En changeant x en $-x$, on a ainsi prouvé la stricte hyperbolicité de p dans la direction b.

13) Pour $x \notin \langle a, b\rangle$, chaque φ_j s'annule exactement une fois (sinon on a trop de racines pour $t \mapsto p(tb+x)$). Comme $\lambda_j(tb+x-sa, a) = \varphi_j(t) - s$ et $tb + x - sa \notin \langle a, b\rangle$, chaque φ_j prend exactement une fois la valeur s, et ce pour tout $s \in \mathbb{R}$. Ainsi les φ_j sont des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Étant continues, elles sont strictement monotones et vu les limites en $\pm\infty$ elles sont strictement croissantes.

Pour $x = \alpha a + \beta b$, on a vu que φ_j est une fonction continue affine par morceaux de coefficients directeurs strictement positifs ; elle est strictement croissante.

14) Supposons dans un premier temps que $\lambda_1(y,a)=0$: pour $\alpha>0$ on a $b=y+\alpha a\in C(p,a)$, donc $t\mapsto\lambda_1(tb+x,a)$ est strictement croissante comme on l'a vu à la question précédente. Lorsque $\alpha\to 0^+$, on a $\lambda_1(tb+x,a)\to\lambda_1(ty+x,a)$ par continuité de λ_1 et donc $t\mapsto\lambda_1(ty+x,a)$ est croissante au sens large en tant que limite simple de fonctions qui le sont.

Dans le cas général ($\lambda_1(y,a)$ quelconque), on peut remplacer y par $y-\lambda_1(y,a)a$ sans changer la quantité

$$f(t)=\lambda_1(ty+x,a)-t\lambda_1(y,a)$$

et on est ramené au cas particulier précédent.

Considérons à présent $x,y\in V$ et $t\in[0,1[$ on a :

$$\begin{aligned}\lambda_1((1-t)x+ty,a)&=(1-t)\lambda_1(x+ty/(1-t),a)\\&=(1-t)f(t/(1-t))+t\lambda_1(y,a)\\&\geqslant(1-t)f(0)+t\lambda_1(y,a)\\&\geqslant(1-t)\lambda_1(x,a)+t\lambda_1(y,a).\end{aligned}$$

La concavité de $x\mapsto\lambda_1(x,a)$ et la convexité de $C(p,a)$ s'ensuivent.

15) $\lambda_1(x,b)$ est un réel t tel qu'il existe $j\in[\![1,d]\!]$ pour lequel $\lambda_j(tb-x,a)=0$. Si l'on suppose $t\leqslant 0$ alors

$$\begin{aligned}0&=\lambda_j(tb-x,a)\\&=(t-1)\lambda_{d+1-j}\Big(\frac{-t}{1-t}b+\frac{1}{1-t}x,a\Big)\\&\leqslant(t-1)\Big(\frac{-t}{1-t}\lambda_{d+1-j}(b,a)+\frac{1}{1-t}\lambda_{d+1-j}(x,a)\Big)\\&\leqslant t\lambda_{d+1-j}(b,a)-\lambda_{d+1-j}(x,a)\\&<0,\end{aligned}$$

ce qui est absurde.

16) On vient de voir que $b\in C(p,a)\Rightarrow C(p,a)\subset C(p,b)$.
Comme $a\in C(p,a)$, on a aussi $b\in C(p,a)\Rightarrow a\in C(p,b)\Rightarrow C(p,b)\subset C(p,a)$.

IV Le cas général

17) a) On écrit $R(x,y)=\sum_{i,j}\lambda_{ij}x^iy^j$ et $Q_0(t)=\sum_i\mu_it^i$.
Alors $x^mQ_0(y^\alpha/x^\beta)=\sum_i\mu_ix^{m-i\beta}y^{i\alpha}$ et l'on a $\alpha(m-i\beta)+\beta(i\alpha)=\alpha m$. Il s'agit donc de séparer les termes $\lambda_{ij}x^iy^j$ de $R(x,y)$ selon que $\alpha i+\beta j=m$ ou $\alpha i+\beta j>m$. α,β sont à déterminer de sorte qu'il n'y ait pas de termes tels que $\alpha i+\beta j<m$ ayant un coefficient non nul. De plus, R_0 doit contenir au moins un terme $\lambda_{ij}x^iy^j$ tel que $\lambda_{ij}\neq 0$ et $j>0$ (condition $\deg(Q_0)>0$).

Notons E l'ensemble des points (i,j) du plan pour lesquels $\lambda_{ij}\neq 0$. C'est un ensemble fini, contenant au moins les deux points $(m,0)$ et $(0,r)$ et ne contenant aucun point $(i,0)$ avec $i<m$. Considérons alors une droite variable D de pente strictement négative et passant par $(m,0)$: il existe une et une seule position de D pour laquelle tous les points de E sont au dessus de D et au moins un point autre que $(m,0)$ est sur D : le point (i,j) en question est tel que la pente $p=(i-m)/(j-0)$ est maximale parmi celles qui sont strictement négatives. On écrit le rationnel p sous forme irréductible $p=-\alpha/\beta$ avec $\alpha,\beta>0$ premiers entre eux, donc D a pour équation cartésienne $\alpha x+\beta y=$ cste et la constante vaut αm puisque $(m,0)\in D$. D étant ainsi choisie, la décomposition de $R(x,y)$ s'ensuit et satisfait clairement aux conditions posées. Par ailleurs $Q_0(0)=\lambda_{m,0}\neq 0$.

b) $R(zu^\alpha,u^\beta)=u^{m\alpha}z^mQ_0(1/z^\beta)+R_1(zu^\alpha,u^\beta)$.
On pose $\widehat{R}(z)=z^mQ_0(1/z^\beta)$ et $S(z,u)=R_1(zu^\alpha,u^\beta)/u^{\alpha m+1}=\sum_{\alpha i+\beta j>\alpha m}\lambda_{ij}z^iu^{\alpha i+\beta j-\alpha m-1}$.
$\widehat{R}$ est bien un polynôme vu la contrainte sur $\deg(Q_0)$ et il est ni constant ni réduit à un seul monôme, donc il admet une racine complexe non nulle.

c) On applique le lemme de Rouché à u fixé avec $P = \widehat{R}$, $Q(z) = uS(z,u)$ et $\varepsilon \leqslant |\Im\omega|$ choisi de sorte que $\widehat{R}(z) \neq 0$ si $|z-\omega| = \varepsilon$. Un tel choix est possible puisque $\widehat{R}$ a un nombre fini de racines. Par continuité et compacité, il existe $M, N > 0$ tels que $|Q(z)| \leqslant M|u|$ et $|P(z)| \geqslant N$ pour tout z tel que $|z-\omega| = \varepsilon$ et tout u tel que $|u| \leqslant 1$. Ainsi, pour $|u| < \min(1, N/M)$, on a bien $\sup|Q| < \inf|P|$.

18) a) Sinon on peut appliquer **17c)** avec u réel non nul et $x = zu^\alpha \notin \mathbb{R}$.

b) On pose $z' = ze^{2i\alpha\pi/\beta}$ et $u' = ue^{-2i\pi/\beta}$. Alors $zu^\alpha = z'u'^\alpha = x$ et $u^\beta = u'^\beta = y$ donc on a les décompositions :

$$\begin{aligned} R(x,y) &= u^{\alpha m}\widehat{R}(z) + u^{\alpha m+1}S(z,u) \\ &= u'^{\alpha m}\widehat{R}(z') + u'^{\alpha m+1}S(z',u') \\ &= u^{\alpha m}e^{-2i\alpha m\pi/\beta}\widehat{R}(z') + u'^{\alpha m+1}S(z',u'). \end{aligned}$$

En simplifiant par $u^{\alpha m}$ et en prenant $u = 0 = u'$, il vient : $\widehat{R}(z) = e^{-2i\alpha m\pi/\beta}\widehat{R}(z')$, ce qui prouve que l'ensemble des racines de $\widehat{R}$ est invariant par la transformation $z \mapsto z'$. Il s'agit d'un ensemble de réels non tous nuls ; ceci impose $e^{2i\alpha\pi/\beta} \in \mathbb{R}$, soit $\beta \mid 2\alpha$ et comme $\alpha \wedge \beta = 1$, β est un diviseur de 2.

c) Même méthode avec la transformation $z' = ze^{i\alpha\pi/\beta}$ et $u' = ue^{-i\pi/\beta}$ soit $(zu^\alpha, u^\beta) = (z'u'^\alpha, -u'^\beta)$. On obtient alors que l'ensemble des racines de $\widehat{R}$ est stable par multiplication par $e^{i\alpha\pi/\beta}$, puis que $\beta \mid \alpha$, d'où $\beta \mid 1$.

d) En reprenant les notations de **17a)**, on a $(0,r) \in E$ donc $\alpha 0 + \beta r \geqslant \alpha m$, soit $r \geqslant \alpha m \geqslant m$.

19) a) $p(sa - tb - x) = p(\underbrace{(s - s^*)}_{X}a + \underbrace{(t^* - t)}_{Y}b + (s^*a - t^*b - x)) = R(X,Y)$.

On a $R(0,0) = p(s^*a - t^*b - x) = 0$ et à Y fixé (soit à t fixé), les racines de $X \mapsto R(X,Y)$ sont toutes réelles. Donc la multiplicité de $X = 0$ comme racine de $R(X,0)$ est majorée par celle de $Y = 0$ comme racine de $R(0,Y)$. La première multiplicité est le nombre de j tels que $\lambda_j(t^*b + x) = s^*$, d'après la factorisation $p(sa - tb - x) = p(a)\prod_j(s - \lambda_j(t^*b + x))$; la deuxième est r par définition.

b) On a toujours φ_j surjective (la démonstration vue en **III-11)** n'utilisait pas l'hypothèse de stricte hyperbolicité). De plus, d'après la question précédente, la somme des multiplicités des racines réelles de $t \mapsto p(tb - x)$ est supérieure ou égale au nombre total de racines pour l'ensemble des φ_j, donc supérieure ou égale au nombre de φ_j, soit d. Ainsi $t \mapsto p(tb - x)$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

V L'inégalité de Gårding sur le cône $C(p,a)$

20) a) $p(tb - x) = M(tb - x, \dots, tb - x) = t^d p(b) - dt^{d-1}M(x, b, \dots, b) + (\text{termes de degré} \leqslant d-2)$. La somme des racines de ce polynôme en t est $\sum_{j=1}^d \lambda_j(x,b) = dM(x,b,\dots,b)/p(b)$.

b) $M(a,b,\dots,b)/p(b) = (1/d)\sum_j \lambda_j(a,b) \geqslant (\prod_j \lambda_j(a,b))^{1/d} = (p(a)/p(b))^{1/d}$. On obtient l'inégalité demandée *en supposant* $p(b) > 0$*, ou ce qui est équivalent,* $p(a) > 0$. Il y a ici une erreur d'énoncé.

21) C'est une conséquence de **I-6)** car $a \cdot \nabla p(x) = dM(a, x, \dots, x)$.

22) Pour $d = 1$ il y a égalité.

Si l'inégalité est vraie au degré $d - 1$, on l'applique au polynôme $q(x) = M(x^1, x, \dots, x)$ *en supposant* $p(a) > 0$ *:*

- $x^1 \in C(p,a)$ donc $q(x^1) = p(x^1) = p(a)\prod_j \lambda_j(x^1, a) > 0$;
- $x^2, \dots, x^d \in C(p,a) = C(p,x^1) \subset C(q,x^1)$.

Il vient :

$$\begin{aligned} M(x^1, x^2, \dots, x^d) &\geqslant \prod_{j=2}^d M(x^1, x^j, \dots, x^j)^{1/(d-1)} \\ &\geqslant \prod_{j=2}^d (p(x^1)^{1/d} p(x^j)^{(d-1)/d})^{1/(d-1)} \\ &\geqslant p(x^1)^{1/d} \prod_{j=2}^d p(x^j)^{1/d}. \end{aligned}$$

23) **a)** On a avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\alpha\beta - B(u,v) \geqslant \alpha\beta - \sqrt{q(u)}\sqrt{q(v)}$. Il reste donc à prouver que pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels positifs avec $\alpha > \gamma$ et $\beta > \delta$, on a $\alpha\beta - \gamma\delta \geqslant \sqrt{(\alpha^2-\gamma^2)(\beta^2-\delta^2)}$.

Une élévation au carré résout trivialement la question, mais le correcteur tient certainement à que l'on applique plutôt l'inégalité de la question précédente.

On considère donc la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $M(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$. La forme quadratique associée est définie par $p(x) = x_1^2 - x_2^2$, polynôme hyperbolique dans la direction de $e_1 = (1,0)$.
$C(p,e_1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } t \mapsto (t-x_1)^2 - x_2^2 \text{ a ses racines strictement positives }\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x_1 > |x_2|\}$, donc les vecteurs (α,γ) et (β,δ) appartiennent à $C(p,e_1)$ et $p(e_1) > 0$, et

$$\alpha\beta - \gamma\delta = M((\alpha,\gamma),(\beta,\delta)) \geqslant \sqrt{p((\alpha,\gamma))p((\beta,\delta))} = \sqrt{(\alpha^2-\gamma^2)(\beta^2-\delta^2)}.$$

b) Ici aussi, on obtient trivialement cette inégalité en appliquant l'inégalité arithmético-géométrique à la quantité $\operatorname{per}(A)/d!$, et on va présenter une solution plus compliquée mais plus dans l'esprit du sujet.

Posons pour $x^1,\dots,x^d \in \mathbb{R}^d$: $M(x^1,\dots,x^d) = \operatorname{per}([x^1,\dots,x^d])$ où $[x^1,\dots,x^d]$ désigne la matrice $d \times d$ ayant $x^1,\dots,x^d$ pour lignes. On a bien une forme d-linéaire symétrique, et le polynôme associé à M est défini par $p(x) = d!\,x_1\dots x_d$. Il est hyperbolique dans la direction $e = (1,\dots,1)$ avec $p(e) > 0$, et $C(p,e)$ est l'ensemble des vecteurs à coordonnées strictement positives. Ainsi, lorsque toutes les coordonnées des vecteurs $x^1,\dots,x^d$ sont strictement positives, on a

$$\operatorname{per}([x^1,\dots,x^d]) \geqslant \prod_{j=1}^{d}\Big(d!\prod_{i=1}^{d} x_i^j\Big)^{1/d} = d!\Big(\prod_{1\leqslant i,j\leqslant d} x_i^j\Big)^{1/d}.$$

Si les vecteurs sont à coordonnées positives ou nulles mais non toutes strictement positives, le produit de droite est nul et l'inégalité est encore vraie.

VI Concavité de $p^{1/d}$ sur le cône $C(p,a)$

24) On suppose toujours $p(a) > 0$. On a :

$$\begin{aligned} p(x+y) &= M(x+y,\dots,x+y) \\ &= \sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k} M(\underbrace{x,\dots,x}_{k},\underbrace{y,\dots,y}_{d-k}) \\ &\geqslant \sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k} p(x)^{k/d}p(y)^{(d-k)/d} \\ &\geqslant (p(x)^{1/d}+p(y)^{1/d})^d. \end{aligned}$$

Ensuite, pour $x, y \in C(p,a)$ et $t \in [0,1]$:

$$p((1-t)x+ty) \geqslant (p((1-t)x)^{1/d} + p(ty)^{1/d})^d = ((1-t)p(x)^{1/d} + tp(y)^{1/d})^d,$$

ce qui prouve la concavité de $p^{1/d}$.

25) On prend $p = \det$ et $a = I$. $C(p,a)$ est l'ensemble des matrices symétriques à valeurs propres strictement positives ; c'est l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

VII Inégalités de Weyl

26) Si $k < 2$ alors $i + j < 3$ donc $i = j = k = 1$ et on contredit la croissance de $t \mapsto \lambda_1(ty + x) - t\lambda_1(y)$ vue en **III-14)**.

27) Si y est colinéaire à a : $y = \alpha a$ alors $\lambda_k(x + y) = \lambda_k(x) + \alpha$ et $\lambda_i(x) + \lambda_j(y) = \lambda_i(x) + \alpha$. Comme $k \geqslant i$, on a aussi $\lambda_k(x) \geqslant \lambda_i(x)$, soit $\lambda_k(x + y) \geqslant \lambda_i(x) + \lambda_j(y)$. Ce cas est donc impossible dans la situation envisagée. Ainsi, par stricte hyperbolicité, les nombres $\lambda_r(y)$ sont distincts. On choisit α strictement compris entre $\lambda_{j-1}(y)$ et $\lambda_j(y)$ (ou $\alpha < \lambda_1(y)$ si $j = 1$) et on pose $u = x$, $v = y - \alpha a$. Avec ce choix, $\lambda_r(v) = \lambda_r(y) - \alpha$ a le signe voulu en fonction de r. De plus,

$$\lambda_k(u + v) - \lambda_i(u) = \lambda_k(x + y) - \lambda_i(x) - \alpha = \underbrace{(\lambda_k(x + y) - \lambda_i(x) - \lambda_j(y))}_{<0} \quad + \quad \underbrace{(\lambda_j(y) - \alpha)}_{>0,\text{ arbitrairement petit}} \quad .$$

On règle α pour que cette dernière somme soit strictement négative.

28) On a vu en **III-11)** : $\lambda_r(u + tv) = t\lambda_r(v) + \underset{t\to+\infty}{o}(t)$ et $\lambda_r(u + tv) = t\lambda_{d+1-r}(v) + \underset{t\to-\infty}{o}(t)$. Donc φ_r a des limites infinies en $\pm\infty$ dont les signes dépendent des positions de r par rapport à j et à $d + 1 - j$. De plus, $\varphi_r(0) = \lambda_r(u)$ et $\varphi_r(1) = \lambda_r(u + v)$ donc on peut comparer $\varphi_r(0)$ et $\varphi_r(1)$ à λ^* en fonction des positions de r par rapport à i et à k. Il y a ainsi seize cas à considérer :

				$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$r \leqslant d + 1 - j$	$r < i$	$r \leqslant k$	$r < j$	$-\infty$		$-$	$-\infty$	$N \geqslant 0$
			$r \geqslant j$	$-\infty$		$-$	$+\infty$	$N \geqslant 1$
		$r > k$	$r < j$	$-\infty$			$-\infty$	$N \geqslant 0$
			$r \geqslant j$	$-\infty$			$+\infty$	$N \geqslant 1$
	$r \geqslant i$	$r \leqslant k$	$r < j$	$-\infty$	$+$	$-$	$-\infty$	$N \geqslant 2$
			$r \geqslant j$	$-\infty$	$+$	$-$	$+\infty$	$N \geqslant 3$
		$r > k$	$r < j$	$-\infty$	$+$		$-\infty$	$N \geqslant 2$
			$r \geqslant j$	$-\infty$	$+$		$+\infty$	$N \geqslant 1$
$r > d + 1 - j$	$r < i$	$r \leqslant k$	$r < j$	$+\infty$		$-$	$-\infty$	$N \geqslant 1$
			$r \geqslant j$	$+\infty$		$-$	$+\infty$	$N \geqslant 2$
		$r > k$	$r < j$	$+\infty$			$-\infty$	$N \geqslant 1$
			$r \geqslant j$	$+\infty$			$+\infty$	$N \geqslant 0$
	$r \geqslant i$	$r \leqslant k$	$r < j$	$+\infty$	$+$	$-$	$-\infty$	$N \geqslant 1$
			$r \geqslant j$	$+\infty$	$+$	$-$	$+\infty$	$N \geqslant 2$
		$r > k$	$r < j$	$+\infty$	$+$		$-\infty$	$N \geqslant 1$
			$r \geqslant j$	$+\infty$	$+$		$+\infty$	$N \geqslant 0$

Dans les colonnes 0 et 1, on a noté $+$ pour $\varphi_r(t) > \lambda^*$, $-$ pour $\varphi_r(t) < \lambda^*$ et rien si l'on ne connaît pas la position de $\varphi_r(t)$ par rapport à λ^*. La dernière colonne donne le minorant demandé.

29) **a)** Le nombre de racines est minoré par le nombre de couples (r, t) tels que $\varphi_r(t) = \lambda^*$ d'après **IV-19a)**. On doit donc calculer $\operatorname{card}\{r \text{ tq } N \geqslant 1\} + 2\operatorname{card}\{r \text{ tq } N \geqslant 2\} + 3\operatorname{card}\{r \text{ tq } N \geqslant 3\}$. En écrivant les seize cas du tableau précédent sous forme d'intersections d'intervalles et en regroupant les intersections ayant des facteurs en commun, il vient :

$$\begin{aligned}
\text{nb. racines} \geqslant \quad & \operatorname{card}([\![1, d + 1 - j]\!] \cap [\![1, i - 1]\!] \cap [\![j, d]\!]) \\
+ \quad & \operatorname{card}([\![1, d + 1 - j]\!] \cap [\![i, d]\!] \cap [\![k + 1, d]\!] \cap [\![j, d]\!]) \\
+ \quad & \operatorname{card}([\![d + 2 - j, d]\!] \cap [\![1, j - 1]\!]) \\
+ 2\, & \operatorname{card}([\![1, d + 1 - j]\!] \cap [\![i, d]\!] \cap [\![1, j - 1]\!]) \\
+ 2\, & \operatorname{card}([\![d + 2 - j, d]\!] \cap [\![1, k]\!] \cap [\![j, d]\!]) \\
+ 3\, & \operatorname{card}([\![1, d + 1 - j]\!] \cap [\![i, d]\!] \cap [\![1, k]\!] \cap [\![j, d]\!]).
\end{aligned}$$

On divise le 3 en $1 + 2$ et on regroupe… cela donne le minorant de l'énoncé.

b) On a $k = i + j - 1 \leqslant d$ donc $j \leqslant i \leqslant d + 1 - j$. Ainsi le deuxième cardinal de la formule précédente est nul. Le troisième l'est aussi car $j \leqslant i$. Le quatrième se simplifie car $[\![j, d]\!] \supset [\![d + 2 - j, d]\!]$.

30) On utilise $\mathrm{card}([\![a, b]\!] = b - a + 1$ pour $a \leqslant b$ et on distingue les cas $k \leqslant d + 1 - j$, $k \geqslant d + 2 - j$.
31) Le nombre de racines ne peut dépasser d. La situation envisagée est donc impossible, d'où

$$\lambda_\ell(x + y) \geqslant \lambda_k(x + y) \geqslant \lambda_i(x) + \lambda_j(y)$$

en supposant $j \leqslant i$. Lorsque $j > i$, on peut permuter x et y.
32) Je ne sais pas.