ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2013 FILIÈRE **MP**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES C – (ULC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$. On note $\mathbb{Q}_+$ l'ensemble des nombres rationnels positifs ou nuls. On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, et $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Pour I intervalle de $\mathbb{R}$, et L un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on note $C(I, L)$ l'ensemble des fonctions continues de I dans L et $C^1(I, L)$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 de I dans L.

On note $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à deux lignes (et deux colonnes) dont les coefficients sont réels.

On note F l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall x, y, \theta \in \mathbb{R}, \qquad f(x\cos\theta - y\sin\theta)\, f(x\sin\theta + y\cos\theta) = f(x)\, f(y).$$

Les parties I, II et III sont indépendantes.

I

On suppose dans cette partie que $f \in F$ est de classe $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

1. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x)\, f(y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})\, f(0).$$

2. i) Calculer (pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$) les quantités $[x\,\frac{\partial}{\partial y} - y\,\frac{\partial}{\partial x}](f(x)\, f(y))$ et $[x\,\frac{\partial}{\partial y} - y\,\frac{\partial}{\partial x}](f(\sqrt{x^2 + y^2}))$.

ii) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \alpha\, x\, f(x).$$

iii) Quelles sont les fonctions de $F \cap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$?

II

On suppose dans cette partie que $f \in F$ est dans $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

1. Montrer que si $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

2. On suppose dans ce paragraphe que $f(0) \neq 0$.

i) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.

ii) On considère la fonction r (de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$) définie par $r(x) = \ln\left(\frac{f(\sqrt{x})}{f(0)}\right)$. Trouver une relation entre $r(x+y)$, $r(x)$ et $r(y)$, lorsque, $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}_+$.

iii) Trouver une relation entre $r(s)$ et $s\,r(1)$ pour $s \in \mathbb{N}$, puis pour $s \in \mathbb{Q}_+$, et enfin pour $s \in \mathbb{R}_+$.

3. Quelles sont les fonctions de $F \cap C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$?

III

1. Soit $A > 0$, $K > 0$, et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $C([0,1], \mathbb{R})$ telles que pour tout $t \in [0,1]$, $C_0(t) \leq A$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, t \in [0,1], \qquad C_{n+1}(t) \leq A + K \int_0^t C_n(s)^2\, ds. \tag{1}$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, t \in [0, \inf(\frac{1}{4AK}, 1)], \qquad C_n(t) \leq 2\,A.$$

2. Soit $T > 0$, $B > 0$, et $D > 0$ des constantes, et ϕ une fonction de $C([0,T], \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\forall t \in [0,T], \qquad \phi(t) \leq B + D \int_0^t \phi(s)\, ds.$$

Montrer que

$$\forall t \in [0,T], \qquad \phi(t) \leq B\, e^{D\,t}.$$

3. Soit $T_1 > 0$, $A_1 > 0$, $K_1 > 0$ des constantes, et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $C([0,T_1], \mathbb{R}_+)$ telles que pour tout $t \in [0, T_1]$, $J_0(t) \leq A_1$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, t \in [0,T_1], \qquad J_n(t) \leq K_1 \int_0^t [J_n(s) + J_{n-1}(s)]\, ds. \tag{2}$$

i) Montrer que pour $t \in [0, T_1]$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$J_n(t) \leq K_1\, e^{K_1\, T_1} \int_0^t J_{n-1}(s)\, ds.$$

ii) En déduire que pour $t \in [0, T_1]$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$J_n(t) \leq A_1 \frac{[K_1\, T_1\, e^{K_1\, T_1}]^n}{n!}.$$

Dans cette partie et la suivante, f_{in} est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $x \mapsto f_{in}(x)\ \exp(x^2/2)$ est continue et bornée.

1. i) Montrer que l'on peut trouver une unique suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $(t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}\mapsto f_n(t,x)\ \exp(x^2/2)$ est continue et bornée, $t\in[0,1]\mapsto f_n(t,x)\in C^1([0,1],\mathbb{R})$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, et (pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}$)

$$\frac{\partial f_{n+1}}{\partial t}(t,x) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{\mathbb{R}}\left[f_n(t,x\,\cos\theta - y\,\sin\theta)\, f_n(t,x\,\sin\theta + y\,\cos\theta)\right.\right. \tag{3}$$

$$\left.\left. - f_{n+1}(t,x)\, f_n(t,y)\right]\, dy\right)\, d\theta,$$

$$f_{n+1}(0,x) = f_{in}(x),$$

et

$$f_0(t,x) = f_{in}(x).$$

Pour cela, on commencera par mettre l'équation (3) sous la forme

$$\frac{\partial f_{n+1}}{\partial t}(t,x) = a_n(t)\, f_{n+1}(t,x) + b_n(t,x),$$

où a_n et b_n sont des fonctions continues (définies à partir de f_n) judicieusement choisies.

ii) Montrer que pour $n\in\mathbb{N}$ et $(t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}$, on a $f_n(t,x)\geq 0$.

2. i) Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}, t\in[0,1], x\in\mathbb{R}, \qquad 0\leq f_n(t,x)\leq C_n(t)\ \exp(-x^2/2),$$

avec $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions de $C([0,1],\mathbb{R})$ telles que (1) est vérifiée (pour A, K convenablement choisis en fonction de f_{in}).

ii) En déduire qu'il existe $T_1\in]0,1]$ et $A>0$ tels que

$$\forall t\in[0,T_1], n\in\mathbb{N}, \qquad C_n(t)\leq 2\,A.$$

3. i) Montrer que (pour tout $n\in\mathbb{N}$)

$$\forall t\in[0,1], x\in\mathbb{R}, \qquad |f_{n+1}(t,x) - f_n(t,x)|\leq J_n(t)\ \exp(-x^2/2),$$

avec $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions de $C([0,1],\mathbb{R})$ telles que pour tout $t\in[0,1]$ (et $n\in\mathbb{N}^*$),

$$J_n(t)\leq 2\,\pi\int_{\mathbb{R}}\exp(-y^2/2)\,dy\ \left[\int_0^t (2\,C_n(s) + C_{n-1}(s))\ J_{n-1}(s)\,ds\right.$$

$$\left. + \int_0^t C_n(s)\,J_n(s)\,ds\right].$$

ii) En déduire que la suite de fonctions $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (2) (pour K_1 et $T_1 > 0$ convenablement choisis).

iii) Montrer qu'il existe $T \in]0,1]$ pour lequel la suite $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R} \mapsto f_n(t,x)\, \exp(x^2/2)$ converge uniformément sur $[0,T]\times\mathbb{R}$. On notera $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R} \mapsto f(t,x)\, \exp(x^2/2)$ la limite de cette suite.

4. Montrer que f est une fonction telle que $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R} \mapsto f(t,x)\, \exp(x^2/2)$ est continue et bornée, $t \in [0,T] \mapsto f(t,x) \in C^1([0,T],\mathbb{R}_+)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{R}} \bigg[f(t, x\,\cos\theta - y\,\sin\theta)\, f(t, x\,\sin\theta + y\,\cos\theta)$$

$$-f(t,x)\, f(t,y) \bigg]\, dy\, d\theta,$$

$$f(0,x) = f_{in}(x).$$

V

Dans cette partie, f désigne une fonction obtenue à la question IV.4.

On échangera par ailleurs dans cette partie sans justification les signes $\int$ (théorème de Fubini) lorsque les intégrandes sont des fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continues telles que $|g(x,y)| \le H\, \exp(-L\,(x^2+y^2))$ pour des constantes $H, L > 0$ données.

1. i) Montrer que si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ est une matrice inversible telle que $d \neq 0$, il existe une matrice triangulaire supérieure inversible $T_1 \in M_2(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire inférieure inversible $T_2 \in M_2(\mathbb{R})$ telles que

$$M = T_1\, T_2.$$

ii) Soit $H, L > 0$, h une fonction continue de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $|h(x,y)| \le H\, \exp(-L\,(x^2+y^2))$, et $M \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\, dxdy = |Det(M)| \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(M(x,y))\, dxdy.$$

2. Montrer que pour toute fonction ϕ de $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto \frac{\phi(x)}{1+x^2}$ est bornée, on a (pour $t \in [0,T]$)

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} f(t,x)\,\phi(x)\, dx = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\pi}^{\pi} \bigg[f(t, x\,\cos\theta - y\,\sin\theta)\, f(t, x\,\sin\theta + y\,\cos\theta)$$

$$-f(t,x)\, f(t,y)\bigg] \times \bigg[\phi(x) + \phi(y) - \phi(x\,\cos\theta - y\,\sin\theta) - \phi(x\,\sin\theta + y\,\cos\theta)\bigg]\, d\theta dx dy.$$

3. i) Calculer (pour $t \in [0,T]$) la quantité $\int_{\mathbb{R}} f(t,x)\,dx$ en fonction de f_{in}.

ii) Montrer que (pour $t \in [0,T]$ et $x \in \mathbb{R}$),

$$f(t,x) \geq f_{in}(x)\, e^{-2\pi\, t\, \int_{\mathbb{R}} f_{in}(y)\, dy}.$$

4. Dans cette question, on suppose qu'il existe $S_1, S_2 > 0$, tels que

$$f_{in}(x) \geq S_1\, e^{-S_2\,|x|^2}.$$

i) Montrer que la quantité $\int_{\mathbb{R}} f(t,x)\, \ln f(t,x)\, dx$ définit une fonction de classe C^1 sur $[0,T]$ et que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} f(t,x)\, \ln f(t,x)\, dx \leq 0.$$

On pourra pour cela s'inspirer du résultat obtenu à la question V.2.

Il s'agit d'une version simplifiée de la première partie du *Théorème H* de Boltzmann, dans lequel on montre la croissance de l'entropie $-\int f\, \ln f$ d'un gaz raréfié.

ii) Montrer que si l'on a (pour $t \in [0,T]$ donné)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} f(t,x)\, \ln f(t,x)\, dx = 0,$$

alors on peut trouver $C_1, C_2 > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(t,x) = C_1\, e^{-C_2\, x^2}.$$

Il s'agit d'une version simplifiée de la seconde partie du *Théorème H* de Boltzmann, dans lequel on montre que si la densité dans l'espace des phases d'un gaz raréfié est d'entropie maximale, alors c'est une fonction Maxwellienne de la vitesse des molécules (ici représentée par une fonction Gaussienne centrée).

⋆ ⋆
⋆