Correction Baccalauréat S - Spécialité
Métropole - Septembre 2013

www.math93.com / www.mathexams.fr

Ce sujet est le sujet de **remplacement de septembre**.

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité maths

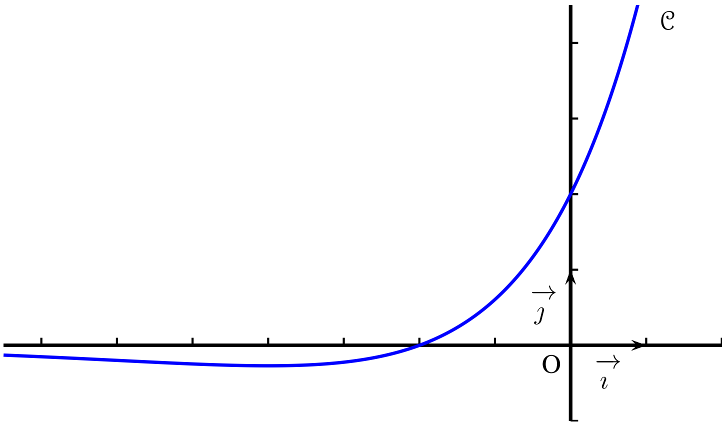
Exercice 1. Étude de fonctions (6 points)

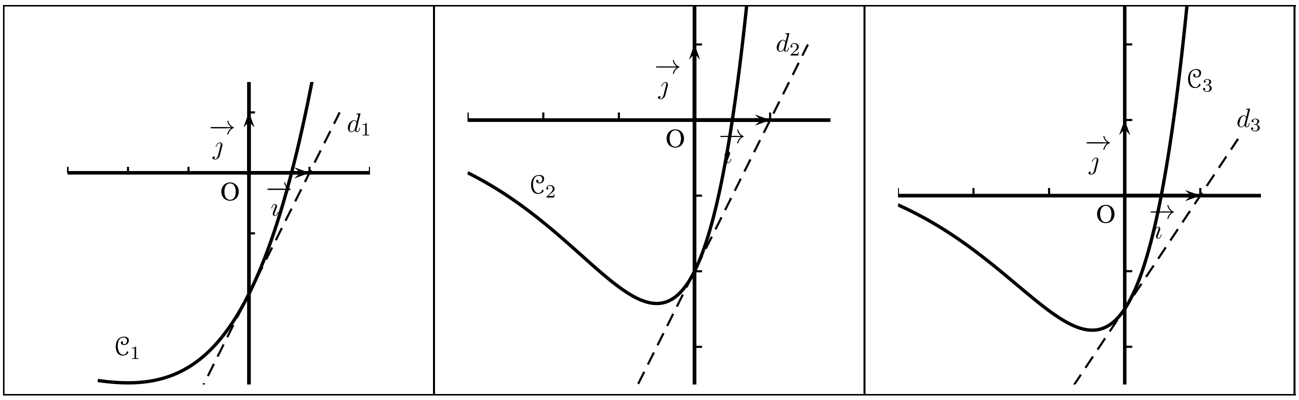
Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}$ et trois autres courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.





1. **Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.**
Graphiquement on a :

$$\boxed{f(x) < 0 \text{ sur }]-\infty\,;\,-2[,\ f(x) > 0 \text{ sur }]-2\,;\,+\infty[\text{ et } f(-2) = 0}$$

.

2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. a. à l'aide de la courbe $\mathcal{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
On a

$$\boxed{F'(0) = f(0) = 2} \text{ et } \boxed{F'(-2) = f(-2) = 0}$$

2. b. L'une des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F. Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

- Puisque $F'(0) = f(0) = 2$, la tangente en $x = 0$ doit avoir un coefficient directeur égal à 2. Sur la *courbe 3* on constate que ce coefficient directeur est d'environ $1,5$. Donc la courbe $\mathcal{C}_3$ ne convient pas .
- Puisque $F'(-2) = f(-2) = 0$, la tangente en -2 doit être horizontale. Ce n'est pas le cas de la courbe $\mathcal{C}_2$. Donc la courbe $\mathcal{C}_2$ ne convient pas .
- Il ne reste donc que la courbe $\mathcal{C}_1$

$$\boxed{\text{La courbe } \mathcal{C}_1 \text{ est donc est la courbe représentative de la fonction } F.}$$

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\text{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

1. L'observation de la courbe $\mathcal{C}$ permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

1. a. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x+4)\text{e}^{\frac{1}{2}x}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est de la forme uv avec :

$$f(x) = u(x) \times v(x) \ \text{ avec } \left\{ \begin{array}{lll} u(x) = x+2 & ; & u'(x) = 1 \\ v(x) = \text{e}^{\frac{1}{2}x} & ; & v'(x) = \dfrac{1}{2}\text{e}^{\frac{1}{2}x} \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ f'(x) &= 1 \times \text{e}^{\frac{1}{2}x} + (x+2) \times \frac{1}{2}\text{e}^{\frac{1}{2}x} \\ f'(x) &= \text{e}^{\frac{1}{2}x}\left(1 + \frac{1}{2}x + 1\right) \\ f'(x) &= \text{e}^{\frac{1}{2}x}\left(2 + \frac{1}{2}x\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)\text{e}^{\frac{1}{2}x}}$$

1. b. En déduire une validation de la conjecture précédente.
Puisque

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \text{e}^{\frac{1}{2}x} > 0$$

$f'(x)$ est donc du signe de $(x+4)$. Par conséquent f est décroissante sur $]-\infty; -4]$ et croissante sur $[-4\ ;\ +\infty[$.
La fonction f admet donc un minimum en $x = -4$.

2. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x$.

2. a. Interpréter géométriquement le réel I.

Puisque

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} > 0$$

$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ est donc du signe de $(x+2)$. La fonction f est donc clairement positive et continue sur $[0\ ;\ 1]$.

I correspond donc à l'aire (en unité d'aire) comprise entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$, l'axe des abscisses et $\mathcal{C}$, la courbe représentative de f.

2. b. Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$. Vérifier que $f = 2\,(u'v + uv')$.

avec :

$$\begin{cases} u(x) = x & ; \quad u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} & ; \quad v'(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ \ 2\,(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) &= 2\left(1 \times \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + x \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right) \\ &= 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\left(1 + x \times \frac{1}{2}\right) \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\,(2+x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = 2\,(u'(x)v(x) + u(x)v'(x))}$$

2. c. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

On a montré à la question II.3) que pour tout réel x,

$$f(x) = 2\,(u'(x)v(x) + u(x)v'(x))$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = 2\,(u(x)v(x))'$$

soit

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\ I &= \int_0^1 2\,(u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x \\ I &= 2\Big[x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\Big]_0^1 \\ I &= 2\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\Big) \end{aligned}$$

$$\boxed{I = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ \text{u.a.}}$$

3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels.
	s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n-1$
	| Affecter à s la valeur $s + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
	Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s.

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n.

3. a. Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.

On peut étudier les différentes valeurs prises par la variable s pour $n = 3$.

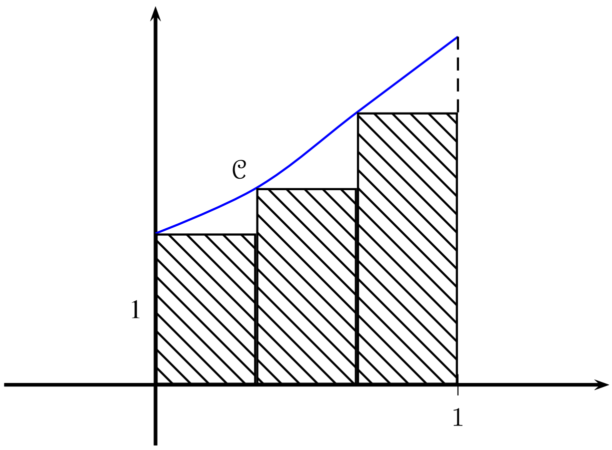
- Pour $k = 0$: on a $s = 0 + \dfrac{1}{3}f(0) = \dfrac{1}{3}f(0)$

  Ce qui correspond à l'aire d'un rectangle de largeur $\dfrac{1}{3}$ et de hauteur $f(0)$.
- Pour $k = 1$: on a $s = \dfrac{1}{3}f(0) + \dfrac{1}{3}f\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

  On ajoute à l'aire précédente l'aire d'un rectangle de largeur $\dfrac{1}{3}$ et de hauteur $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$
- Pour $k = 2$: on a $s = \dfrac{1}{3}f(0) + \dfrac{1}{3}f\left(\dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{3}f\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

  On ajoute à l'aire précédente l'aire d'un rectangle de largeur $\dfrac{1}{3}$ et de hauteur $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

  On obtient, au final, la somme des aires des 3 rectangles hachurés.



3. b. Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?

Plus n devient grand, plus la largeur des rectangles deviendra petite et le pas de la subdivision σ tendra vers zéro. Alors la somme de Riemann générale qui est ici calculée converge vers l'intégrale de f sur $[0\ ;\ 1]$. C'est d'ailleurs la définition originale par Riemann de son intégrale. Cela nous permettra donc de calculer une valeur approchée de I.

Et on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n = I}$$

Exercice 2. QCM de géométrie dans l'espace (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour les questions 1 et 2, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. La droite $\mathcal{D}$ est définie par la représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5-2t \\ y = 1+3t \\ z = 4 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Question 1

1. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $3x+2y+z-6=0$.

1. a. La droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

1. b. La droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

1. c. La droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

- Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{v_{\mathcal{D}}}(-2\ ;\ 3\ ;\ 0)$. Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(3\ ;\ 2\ ;\ 1)$.
  Or
  $$\overrightarrow{v_{\mathcal{D}}} \cdot \overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} = -2\times 3+3\times 2+0\times 1=0$$
  Donc $\overrightarrow{v_{\mathcal{D}}}$ et $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$ sont orthogonaux.
- La droite $\mathcal{D}$ est donc parallèle au plan $\mathcal{P}$ ou incluse dans ce plan.
  On a facilement en prenant $t=0$ dans l'équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ que : $B(5\ ;\ 1\ ;\ 4)\in\mathcal{D}$.
  Regardons si le point $B(5\ ;\ 1\ ;\ 4)$ appartient au plan $\mathcal{P}$:
  $$3\times 5+2\times 1+4-6=15\neq 0$$
  La droite est donc parallèle au plan. $\boxed{\textbf{Affirmation b}}$.

Question 2

2. On note $\mathcal{D}'$ la droite qui passe par le point A de coordonnées $(3\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}$.

2. a. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

2. b. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes.

2. c. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

- Les vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, $\overrightarrow{v_{\mathcal{D}}}(-2\ ;\ 3\ ;\ 0)$ et $\overrightarrow{v_{\mathcal{D}'}}(2\ ;\ -1\ ;\ 2)$, ne sont pas colinéaires (composante nulle selon $\vec{k}$ pour $\overrightarrow{v_{\mathcal{D}}}$). Les 2 droites ne sont donc pas parallèles.
- Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}'$ est
  $$\mathcal{D}' \ :\ \begin{cases} x = 3+2k \\ y = 1-k \\ z = 1+2k \end{cases},\quad k\in\mathbb{R}$$
  Regardons si les droites sont sécantes. On cherche donc à résoudre
  $$\begin{cases} 5-2t = 3+2k \\ 1+3t = 1-k \\ 4 = 1+2k \end{cases}$$

La dernière équation nous donne $k = \dfrac{3}{2}$ puis $t = -0,5$ dans les deux premières. Les deux droites sont donc sécantes en un pont, $C(6\ ;\ -0,5\ ;\ 4)$. **Affirmation b**.

Pour les questions 3 et 4, le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

Question 3

3. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z + \mathrm{i}| = |z - \mathrm{i}|$.

3. a. $\mathcal{E}$ est l'axe des abscisses.

3. b. $\mathcal{E}$ est l'axe des ordonnées.

3. c. $\mathcal{E}$ est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.

En notant $D(-i)$ et $E(i)$, on remarque que $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M vérifiant $MD = ME$.
$\mathcal{E}$ est donc la médiatrice du segment $[DE]$. Il s'agit donc de l'axe des abscisses. **Affirmation a**.

Question 4

4. On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

4. a. Le triangle OBC est isocèle en O.

4. b. Les points O, B, C sont alignés.

4. c. Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.

- On a
$$\frac{OC}{OB} = \left|\frac{c}{b}\right| = \sqrt{2}$$
Donc $OC \neq OB$ et le triangle OBC n'est pas isocèle en 0.
- On a
$$\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) = \arg\left(\frac{c}{b}\right) = \frac{\pi}{4} \mod 2\pi$$
Les points O, B et C ne sont pas alignés.
- Il ne reste donc plus que **Affirmation c**.

Exercice 3. Probabilités (5 points)

Commun à tous les candidats

Dans une usine, on utilise deux machines A et B pour fabriquer des pièces.

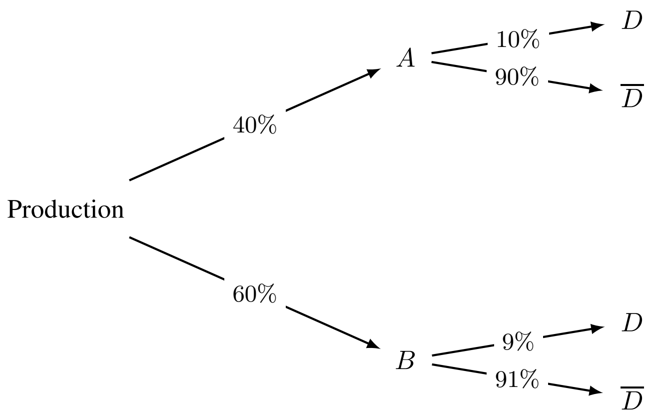
1. La machine A assure 40 % de la production et la machine B en assure 60 %.

On estime que 10 % des pièces issues de la machine A ont un défaut et que 9 % des pièces issues de la machine B ont un défaut.

On choisit une pièce au hasard et on considère les évènements suivants :

- A : « La pièce est produite par la machine A »
- B : « La pièce est produite par la machine B »
- D : « La pièce a un défaut ».
- $\overline{D}$, l'évènement contraire de l'évènement D.

1. a. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.



1. b. Calculer la probabilité que la pièce choisie présente un défaut et ait été fabriquée par la machine A.

On cherche $P(D \cap A)$ soit :

$$\begin{aligned} P(D \cap A) &= P_A(D) \times P(A) \\ &= 10\% \times 40\% \\ &= 4\% \end{aligned}$$

$$\boxed{P(D \cap A) = 4\%}$$

1. c. Démontrer que la probabilité $P(D)$ de l'évènement D est égale à $0,094$.

Les évènements A et B formant une partition de l'univers on a :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap A) + P(D \cap B) \\ &= 4\% + P_B(D) \times P(B) \\ &= 4\% + 9\% \times 60\% \\ &= 4\% + 5,4\% \end{aligned}$$

$$\boxed{P(D) = 9,4\%}$$

1. d. On constate que la pièce choisie a un défaut. Quelle est la probabilité que cette pièce provienne de la machine A ?

On cherche $P_D(A)$ soit :

$$\begin{aligned}P_D(A) &= \frac{P\left(D\cap A\right)}{P(D)}\\ &= \frac{4\%}{9,4\%}\\ &= \frac{40}{94} = \frac{20}{47}\end{aligned}$$

$$\boxed{P_D(A) = \frac{20}{47} \simeq 0,42}$$

2. On estime que la machine A est convenablement réglée si 90 % des pièces qu'elle fabrique sont conformes.

On décide de contrôler cette machine en examinant n pièces choisies au hasard (n entier naturel) dans la production de la machine A. On assimile ces n tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise.

On note X_n le nombre de pièces qui sont conformes dans l'échantillon de n pièces, et $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ la proportion correspondante.

2. a. Justifier que la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

Vérifions les hypothèses de validation d'un loi binomiale :

- Une pièce a 2 états : elle a un défaut ou elle n'en a pas. La probabilité d'être conforme est donc :

$$p = P_A\left(\overline{D}\right) = 90\% = 0,9$$

  et X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p
- Les n pièces sont choisies au hasard, les tirages sont aléatoires ;
- Les tirages sont indépendants et identiques.

De ce fait, la variable aléatoire X_n désigne bien le nombre de succès d'une répétition, de manière **indépendante**, de n **épreuves de Bernoulli** de paramètre p.

X_n **suit donc une loi binomiale de paramètres** n **et** $p = 0,9$.

2. b. Dans cette question, on prend $n = 150$. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de la variable aléatoire F_{150}.

On a $n = 150$, $p = 90\%$ alors on sait que puisque :

$$\begin{cases} ✓ & n = 150 \geq 30\\ ✓ & np = 150\times 90\% = 135 \geq 5\\ ✓ & n(1-p) = 150\times 10\% = 15 \geq 5\end{cases}$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% pour la fréquence F_{150} est :

$$I_{150} = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,9 - 1,96\frac{\sqrt{0,9(0,1)}}{\sqrt{150}}\ ;\ 0,9 + 1,96\frac{\sqrt{0,9(0,1)}}{\sqrt{150}}\right]$$

soit

$$\boxed{I \approx [0{,}852\ ;\ 0{,}948]}$$

2. c. Un test qualité permet de dénombrer 21 pièces non conformes sur un échantillon de 150 pièces produites. Cela remet-il en cause le réglage de la machine ? Justifier la réponse.

La proportion de pièces conforme est donc :

$$\frac{150-21}{150} = \frac{129}{150} = 0,86 \in I$$

Le réglage de la machine n'est donc pas a remettre en cause.

Exercice 4. Suites et matrices - Spécialité (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre

Dans un village imaginaire isolé, une nouvelle maladie contagieuse mais non mortelle a fait son apparition.
Rapidement les scientifiques ont découvert qu'un individu pouvait être dans l'un des trois états suivants :

S : « l'individu est sain, c'est-à-dire non malade et non infecté »,

I : « l'individu est porteur sain, c'est-à -dire non malade mais infecté »,

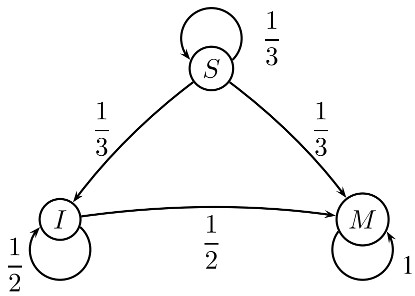
M : « l'individu est malade et infecté ».

Partie A

Les scientifiques estiment qu'un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus suivant :

- parmi les individus sains, la proportion de ceux qui deviennent porteurs sains est égale à $\frac{1}{3}$ et la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{3}$,
- parmi les individus porteurs sains, la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{2}$.

La situation peut être représentée par un graphe probabiliste comme ci-dessous.



On note $P_n = (s_n \quad i_n \quad m_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines où s_n, i_n et $m_n$désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade la n-ème semaine.
On a alors $P_0 = (0,99 \quad 0 \quad 0,01)$ et pour tout entier naturel n,

$$\left\{\begin{array}{lcl} s_{n+1} & = & \frac{1}{3}s_n \\ i_{n+1} & = & \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n \\ m_{n+1} & = & \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n \end{array}\right.$$

1. Écrire la matrice A appelée *matrice de transition*, telle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times A$.
La matrice de transition est donnée par :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.
Notons pour tout entier naturel n le postulat

$$(H_n) : P_n = P_0 \times A^n$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$, le postulat (H_1) est vrai puisque :

$$P_1 = P_0 A = P_0 A^1$$

- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, $(H_n) : P_n = P_0 \times A^n$ soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n \times A \\ P_{n+1} &= (P_0 \times A^n) \times A \\ P_{n+1} &= P_0 \times A^{n+1} \end{aligned}$$

  On a alors montré que (H_{n+1}) est vrai.
- **Conclusion**
  On a montré que (H_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (H_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (H_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier n.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \ P_n = P_0 \times A^n}$$

3.

- **Déterminer l'état probabiliste P_4 au bout de quatre semaines. On pourra arrondir les valeurs à** 10^{-2}.
  Au bout de 4 semaines,

$$\boxed{P_4 = P_0 \times A^4 = (0,01 \ \ 0,10 \ \ 0,89) \text{ arrondi à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

- **Quelle est la probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines** ?
  La probabilité qu'un individu soit sain au bout de 4 semaines est donc de $0,01$.

Partie B

La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatement l'ensemble de la population.
L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

« On note Q_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination. Ainsi, $Q_n = (S_n \quad I_n \quad M_n)$ où S_n, I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n-ième semaine après la vaccination.
Pour tout entier naturel n, on a alors $Q_{n+1} = Q_n \times B$.
D'après la partie A, $Q_0 = P_4$. Pour la suite, on prend $Q_0 = (0,01 \quad 0,10 \quad 0,89)$ où les coefficients ont été arrondis au 10^{me}.

1. Exprimer S_{n+1}, I_{n+1} et M_{n+1} en fonction de $S_n,\ I_n$ et M_n.
Pour tout entier n on a :

$$Qn+1 = Qn \times B$$
$$Qn+1 = (512Sn + 512In + 16Mn\ ;\ 14Sn + 14In + 12Mn\ ;\ 13Sn + 13In + 13Mn)$$

Donc

$$\boxed{\begin{cases} Sn+1 & = 512Sn + 512In + 16Mn \\ In+1 & = 14Sn + 14In + 12Mn \\ Mn+1 & = 13Sn + 13In + 13Mn \end{cases}}$$

2. Déterminer la constante réelle k telle que $B^2 = kJ$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1. On en déduit que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $B^n = B^2$.
On a

$$\boxed{B^2 = \frac{1}{3} \times J}$$

Montrons par récurrence que

$$B^n = B^2 \text{ pour tout } n \geq 2$$

- **Initialisation**
  Si $n = 2$ c'est évident.
- **Hérédité**
  Supposons la propriété vraie au rang n. Alors

  $$B_{n+1} = B_n \times B = B_2 \times B = \frac{1}{3}J \times B = \frac{1}{3}J = B^2$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 2. En la supposant vraie au rang n, elle est encore vraie au rang $n+1$. Par conséquent, pour tout

  $$\boxed{\forall n,\ n \geq 2,\ \ B^n = B^2}$$

3.

3. a. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $Q_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
Si $n \geq 2$ on a donc

$$\boxed{Q_n = Q_0 \times B^n = Q_0 \times B^2 = \frac{1}{3}Q_0 \times J = \left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)}$$

3. b. Interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie. Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?
Avec ce vaccin, $\frac{1}{3}$ des individus sont sains, $\frac{1}{3}$ sont porteur sain et $\frac{1}{3}$ sont malades. On n'a donc pas éradiqué la maladie.