Correction Baccalauréat S - Obligatoire
Métropole - Septembre 2013

www.math93.com / www.mathexams.fr

Ce sujet est le sujet de **remplacement de septembre**.

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité maths

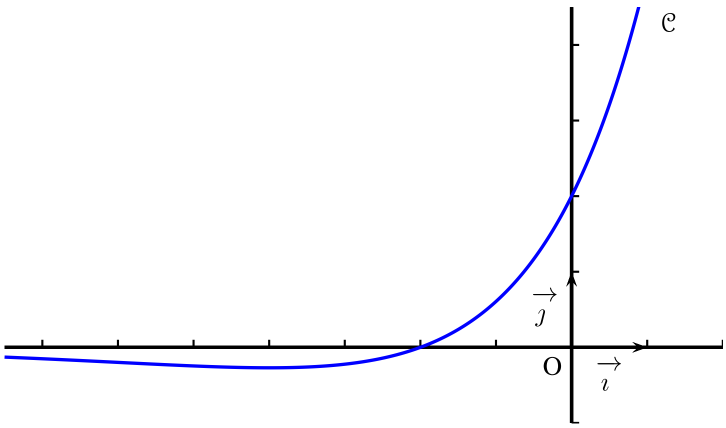
Exercice 1. Étude de fonctions (6 points)

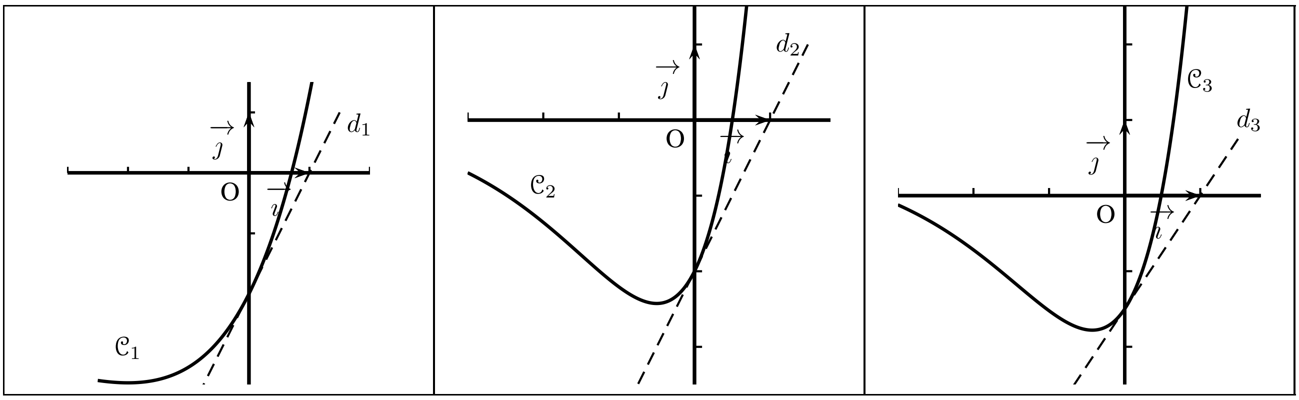
Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}$ et trois autres courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.





1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
Graphiquement on a :

$$\boxed{f(x) < 0 \text{ sur }]-\infty\,;\,-2[,\ f(x) > 0 \text{ sur }]-2\,;\,+\infty[\text{ et } f(-2) = 0}$$

.

2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. a. à l'aide de la courbe $\mathcal{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
On a

$$\boxed{F'(0) = f(0) = 2} \text{ et } \boxed{F'(-2) = f(-2) = 0}$$

2. b. L'une des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F. Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

- Puisque $F'(0) = f(0) = 2$, la tangente en $x = 0$ doit avoir un coefficient directeur égal à 2. Sur la *courbe 3* on constate que ce coefficient directeur est d'environ $1,5$. Donc la courbe $\mathcal{C}_3$ ne convient pas .
- Puisque $F'(-2) = f(-2) = 0$, la tangente en -2 doit être horizontale. Ce n'est pas le cas de la courbe $\mathcal{C}_2$. Donc la courbe $\mathcal{C}_2$ ne convient pas .
- Il ne reste donc que la courbe $\mathcal{C}_1$

$$\boxed{\text{La courbe } \mathcal{C}_1 \text{ est donc est la courbe représentative de la fonction } F.}$$

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

1. L'observation de la courbe $\mathcal{C}$ permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

1. a. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x+4)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est de la forme uv avec :

$$f(x) = u(x) \times v(x) \ \text{ avec } \left\{\begin{array}{lcl} u(x) = x+2 & ; & u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} & ; & v'(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \end{array}\right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + (x+2) \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \\ f'(x) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\left(1 + \frac{1}{2}x + 1\right) \\ f'(x) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\left(2 + \frac{1}{2}x\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}}$$

1. b. En déduire une validation de la conjecture précédente.
Puisque

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} > 0$$

$f'(x)$ est donc du signe de $(x+4)$. Par conséquent f est décroissante sur $]-\infty; -4]$ et croissante sur $[-4\ ;\ +\infty[$.
La fonction f admet donc un minimum en $x = -4$.

2. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. a. Interpréter géométriquement le réel I.

Puisque

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} > 0$$

$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ est donc du signe de $(x+2)$. La fonction f est donc clairement positive et continue sur $[0\ ;\ 1]$.

I correspond donc à l'aire (en unité d'aire) comprise entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$, l'axe des abscisses et $\mathcal{C}$, la courbe représentative de f.

2. b. Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$. Vérifier que $f = 2\left(u'v + uv'\right)$.

avec :

$$\begin{cases} u(x) = x & ; \quad u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} & ; \quad v'(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \ 2\left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right) &= 2\left(1 \times \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + x \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right) \\
&= 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\left(1 + x \times \frac{1}{2}\right) \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\left(2 + x\right) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = 2\left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)}$$

2. c. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

On a montré à la question II.3) que pour tout réel x,

$$f(x) = 2\left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = 2\left(u(x)v(x)\right)'$$

soit

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x \\
I &= \int_0^1 2\left(u(x)v(x)\right)'\ \mathrm{d}x \\
I &= 2\Big[x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\Big]_0^1 \\
I &= 2\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\Big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{I = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ \text{u.a.}}$$

3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels.
	s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n-1$
	| Affecter à s la valeur $s + \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.
	Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s.

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n.

3. a. Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.

On peut étudier les différentes valeurs prises par la variable s pour $n = 3$.

- Pour $k = 0$: on a $s = 0 + \frac{1}{3}f(0) = \frac{1}{3}f(0)$

  Ce qui correspond à l'aire d'un rectangle de largeur $\frac{1}{3}$ et de hauteur $f(0)$.

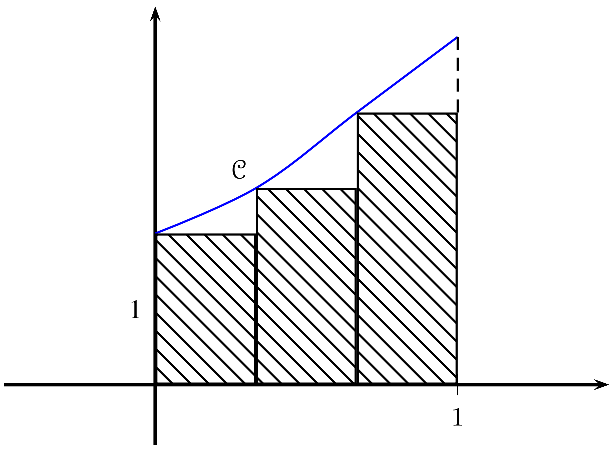
- Pour $k = 1$: on a $s = \frac{1}{3}f(0) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)$.

  On ajoute à l'aire précédente l'aire d'un rectangle de largeur $\frac{1}{3}$ et de hauteur $f\left(\frac{1}{3}\right)$

- Pour $k = 2$: on a $s = \frac{1}{3}f(0) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$.

  On ajoute à l'aire précédente l'aire d'un rectangle de largeur $\frac{1}{3}$ et de hauteur $f\left(\frac{2}{3}\right)$.

  On obtient, au final, la somme des aires des 3 rectangles hachurés.



3. b. Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?

Plus n devient grand, plus la largeur des rectangles deviendra petite et le pas de la subdivision σ tendra vers zéro. Alors la somme de Riemann générale qui est ici calculée converge vers l'intégrale de f sur $[0 ; 1]$. C'est d'ailleurs la définition originale par Riemann de son intégrale. Cela nous permettra donc de calculer une valeur approchée de I.

Et on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n = I}$$

Exercice 2. QCM de géométrie dans l'espace (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour les questions 1 et 2, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. La droite $\mathcal{D}$ est définie par la représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5-2t \\ y & = & 1+3t \\ z & = & 4 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Question 1

1. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $3x+2y+z-6=0$.

1. a. La droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

1. b. La droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

1. c. La droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

- Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{v_{\mathcal{D}}}\,(-2\,;\,3\,;\,0)$. Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}\,(3\,;\,2\,;\,1)$.
  Or
  $$\overrightarrow{v_{\mathcal{D}}}\cdot\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} = -2\times 3+3\times 2+0\times 1=0$$
  Donc $\overrightarrow{v_{\mathcal{D}}}$ et $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$ sont orthogonaux.
- La droite $\mathcal{D}$ est donc parallèle au plan $\mathcal{P}$ ou incluse dans ce plan.
  On a facilement en prenant $t=0$ dans l'équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ que : $B(5\,;\,1\,;\,4)\in\mathcal{D}$.
  Regardons si le point $B(5\,;\,1\,;\,4)$ appartient au plan $\mathcal{P}$:
  $$3\times 5+2\times 1+4-6=15\neq 0$$
  La droite est donc parallèle au plan. **Affirmation b**.

Question 2

2. On note $\mathcal{D}'$ la droite qui passe par le point A de coordonnées $(3\,;\,1\,;\,1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$.

2. a. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

2. b. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes.

2. c. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

- Les vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, $\overrightarrow{v_{\mathcal{D}}}\,(-2\,;\,3\,;\,0)$ et $\overrightarrow{v_{\mathcal{D}'}}\,(2\,;\,-1\,;\,2)$, ne sont pas colinéaires (composante nulle selon $\overrightarrow{k}$ pour $\overrightarrow{v_{\mathcal{D}}}$). Les 2 droites ne sont donc pas parallèles.
- Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}'$ est
  $$\mathcal{D}' \;:\; \left\{\begin{array}{rr} x= & 3+2k \\ y= & 1-k \\ z= & 1+2k \end{array}\right.,\quad k\in\mathbb{R}$$
  Regardons si les droites sont sécantes. On cherche donc à résoudre
  $$\left\{\begin{array}{rr} 5-2t= & 3+2k \\ 1+3t= & 1-k \\ 4= & 1+2k \end{array}\right.$$

La dernière équation nous donne $k = \dfrac{3}{2}$ puis $t = -0,5$ dans les deux premières. Les deux droites sont donc sécantes en un pont, $C(6\ ;\ -0,5\ ;\ 4)$. **Affirmation b**.

Pour les questions 3 et 4, le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

Question 3

3. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z + \mathrm{i}| = |z - \mathrm{i}|$.

3. a. $\mathcal{E}$ est l'axe des abscisses.

3. b. $\mathcal{E}$ est l'axe des ordonnées.

3. c. $\mathcal{E}$ est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.

En notant $D(-i)$ et $E(i)$, on remarque que $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M vérifiant $MD = ME$.
$\mathcal{E}$ est donc la médiatrice du segment $[DE]$. Il s'agit donc de l'axe des abscisses. **Affirmation a**.

Question 4

4. On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

4. a. Le triangle OBC est isocèle en O.

4. b. Les points O, B, C sont alignés.

4. c. Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.

- On a
$$\frac{OC}{OB} = \left|\frac{c}{b}\right| = \sqrt{2}$$
Donc $OC \neq OB$ et le triangle OBC n'est pas isocèle en 0.
- On a
$$\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) = \arg\left(\frac{c}{b}\right) = \frac{\pi}{4} \mod 2\pi$$
Les points O, B et C ne sont pas alignés.
- Il ne reste donc plus que **Affirmation c**.

Exercice 3. Probabilités (5 points)

Commun à tous les candidats

Dans une usine, on utilise deux machines A et B pour fabriquer des pièces.

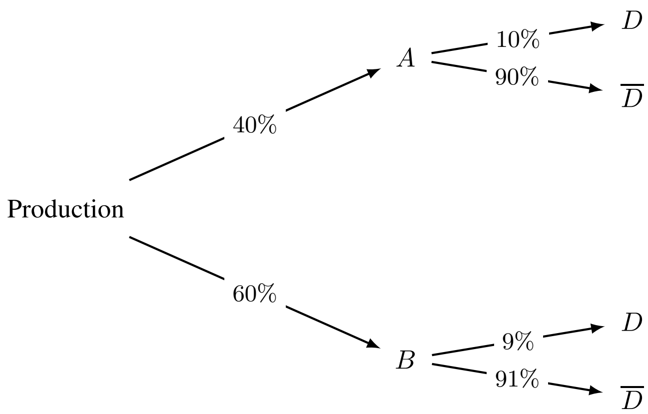
1. La machine A assure 40 % de la production et la machine B en assure 60 %.

On estime que 10 % des pièces issues de la machine A ont un défaut et que 9 % des pièces issues de la machine B ont un défaut.

On choisit une pièce au hasard et on considère les évènements suivants :

- A : « La pièce est produite par la machine A »
- B : « La pièce est produite par la machine B »
- D : « La pièce a un défaut ».
- $\overline{D}$, l'évènement contraire de l'évènement D.

1. a. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.



1. b. Calculer la probabilité que la pièce choisie présente un défaut et ait été fabriquée par la machine A.

On cherche $P\left(D \cap A\right)$ soit :

$$\begin{aligned} P\left(D \cap A\right) &= P_A(D) \times P(A) \\ &= 10\% \times 40\% \\ &= 4\% \end{aligned}$$

$$\boxed{P\left(D \cap A\right) = 4\%}$$

1. c. Démontrer que la probabilité $P(D)$ de l'évènement D est égale à $0,094$.

Les évènements A et B formant une partition de l'univers on a :

$$\begin{aligned} P\left(D\right) &= P\left(D \cap A\right) + P\left(D \cap B\right) \\ &= 4\% + P_B(D) \times P(B) \\ &= 4\% + 9\% \times 60\% \\ &= 4\% + 5,4\% \end{aligned}$$

$$\boxed{P\left(D\right) = 9,4\%}$$

1. d. On constate que la pièce choisie a un défaut. Quelle est la probabilité que cette pièce provienne de la machine A ?

On cherche $P_D(A)$ soit :

$$\begin{aligned} P_D(A) &= \frac{P(D \cap A)}{P(D)} \\ &= \frac{4\%}{9,4\%} \\ &= \frac{40}{94} = \frac{20}{47} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_D(A) = \frac{20}{47} \simeq 0,42}$$

2. On estime que la machine A est convenablement réglée si 90 % des pièces qu'elle fabrique sont conformes.

On décide de contrôler cette machine en examinant n pièces choisies au hasard (n entier naturel) dans la production de la machine A. On assimile ces n tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise.

On note X_n le nombre de pièces qui sont conformes dans l'échantillon de n pièces, et $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ la proportion correspondante.

2. a. Justifier que la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

Vérifions les hypothèses de validation d'un loi binomiale :

- Une pièce a 2 états : elle a un défaut ou elle n'en a pas. La probabilité d'être conforme est donc :

$$p = P_A\left(\overline{D}\right) = 90\% = 0,9$$

  et X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p
- Les n pièces sont choisies au hasard, les tirages sont aléatoires ;
- Les tirages sont indépendants et identiques.

De ce fait, la variable aléatoire X_n désigne bien le nombre de succès d'une répétition, de manière **indépendante**, de n **épreuves de Bernoulli** de paramètre p.

X_n **suit donc une loi binomiale de paramètres** n **et** $p = 0,9$.

2. b. Dans cette question, on prend $n = 150$. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de la variable aléatoire F_{150}.

On a $n = 150$, $p = 90\%$ alors on sait que puisque :

$$\begin{cases} ✓ & n = 150 \geq 30 \\ ✓ & np = 150 \times 90\% = 135 \geq 5 \\ ✓ & n(1-p) = 150 \times 10\% = 15 \geq 5 \end{cases}$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% pour la fréquence F_{150} est :

$$I_{150} = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,9 - 1,96\frac{\sqrt{0,9(0,1)}}{\sqrt{150}}\ ;\ 0,9 + 1,96\frac{\sqrt{0,9(0,1)}}{\sqrt{150}}\right]$$

soit

$$\boxed{I \approx [0{,}852\ ;\ 0{,}948]}$$

2. c. Un test qualité permet de dénombrer 21 pièces non conformes sur un échantillon de 150 pièces produites. Cela remet-il en cause le réglage de la machine ? Justifier la réponse.

La proportion de pièces conforme est donc :

$$\frac{150 - 21}{150} = \frac{129}{150} = 0,86 \in I$$

Le réglage de la machine n'est donc pas a remettre en cause.

Exercice 4. Suites - Obligatoire (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel $n, u_n > 0$.

1. 1. a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
On obtient facilement :

$$\boxed{u_1 = \frac{4}{5}\ ;\ u_2 = \frac{14}{13} \simeq 1,08\ ;\ u_3 = \frac{40}{41} \simeq 0,98\ ;\ u_4 = \frac{122}{121} \simeq 1,01}$$

1. b. Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

- <u>Pour $n = 0$</u> : $u_0 - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$ qui est du signe de $(-1)^n = (-1)^0 = 1 > 0$.
- <u>Pour $n = 1$</u> : $u_1 - 1 = -\frac{1}{5} < 0$ qui est du signe de $(-1)^n = (-1)^1 = -1 < 0$.
- <u>Pour $n = 2$</u> : $u_2 - 1 = \frac{1}{13} > 0$ qui est du signe de $(-1)^n = (-1)^2 = 1 > 0$.
- <u>Pour $n = 3$</u> : $u_3 - 1 = -\frac{1}{41} < 0$ qui est du signe de $(-1)^n = (-1)^3 = -1 < 0$.
- <u>Pour $n = 4$</u> : $u_4 - 1 = \frac{1}{121} > 0$ qui est du signe de $(-1)^n = (-1)^4 = 1 > 0$.

1. c. Établir que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} - 1 &= \frac{u_n + 2}{2u_n + 1} - 1 \\ &= \frac{u_n + 2}{2u_n + 1} - \frac{2u_n + 1}{2u_n + 1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}}$$

1. d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n,\ u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
Notons pour tout entier naturel n le postulat

$$(P_n) : u_n - 1 \ \text{ a le même signe que } \ (-1)^n$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque l'on vient de montrer que :
  $u_0 - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$ est du signe de $(-1)^n = (-1)^0 = 1 > 0$.
- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n + 1$.
  - D'après la question 1c) :
    $$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$$
  - Or d'après les données initiales, pour tout entier naturel $n, u_n > 0$ et donc $\frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$ est du signe de $-u_n + 1$.
  - On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que (P_n) soit vérifié et donc que $u_n - 1$ a le même signe qu
    De ce fait $1 - u_n$ a le même signe que $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$

  - On a alors montré que $u_{n+1}-1$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.

- **Conclusion**
  On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier n.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n - 1 \text{ a le même signe que } (-1)^n}$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

2. a. Établir que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} \\
&= \frac{\dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}}{\dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} + 1} \\
&= \frac{\dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}}{\dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} + \dfrac{2u_n + 1}{2u_n + 1}} \\
v_{n+1} &= \frac{\dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}}{\dfrac{3u_n + 3}{2u_n + 1}} = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1} \times \frac{2u_n + 1}{3u_n + 3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}}$$

2. b.

- **Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.**

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \ \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}}{\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3} \times \frac{u_n + 1}{u_n - 1} \\
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{-(u_n - 1)}{3(u_n + 1)} \times \frac{u_n + 1}{u_n - 1} \\
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{-(u_n - 1)}{u_n - 1} \times \frac{u_n + 1}{3(u_n + 1)} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} v_{n+1} &= -\dfrac{1}{3} v_n \\ v_0 &= \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{2 - 1}{2 + 1} = \dfrac{1}{3} \end{cases}}$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

- **En déduire l'expression de v_n en fonction de n.**
  On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times v_0 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

2. c. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$. Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$$
$$u_n = \frac{1+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

Et donc en multipliant numérateur et dénominateur par 3 :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{3+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{3-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}}$$

Or par théorème

Théorème 1

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a
$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

De ce fait, ici $-1 < q = -\frac{1}{3} < 1$ et d'après le théorème 1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$.
Ce qui nous donne la limite de la suite (u_n) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$