Math93.com

Baccalauréat 2017 - ES/L Polynésie

Série ES/L Obli. et Spé.
16 Juin 2017
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. QCM — 4 points

Commun à tous les candidats

Question 1 (Réponse b)

La solution exacte de l'équation $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{3}{10}$ est :

(a) 1,74 (b) $\boxed{\frac{\ln 10 - \ln 3}{\ln 2}}$ (c) $-\frac{\ln 3}{\ln 5}$ (d) 0,5

Preuve.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{3}{10} &\iff \ln\left(\frac{1}{2}\right)^x = \ln\frac{3}{10} \\
&\iff x\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{3}{10} \\
&\iff x = \frac{\ln\frac{3}{10}}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

On applique le spropriété de la fonction ln, sous réserve d'existance, $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ donc :

$$\iff x = \frac{\ln 3 - \ln 10}{-\ln 2} = \frac{\ln 10 - \ln 3}{\ln 2}$$

Question 2 (Réponse c)

f est la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$.
La valeur exacte de l'intégrale $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ est :

(a) $4\mathrm{e}^4 - 4\mathrm{e}^{-4}$ (b) $4\left(\mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^{-4}\right)$ $\boxed{\text{(c) } 0}$ (d) 1

Preuve.
La fonction f est de la forme $u' \times \mathrm{e}^u$ donc c'est la dérivée d'une fonction de la forme e^u avec pour tout x réel $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$. De ce fait une primitive de f est par exemple la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \mathrm{e}^{x^2}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x &= F(2) - F(-2)\\ &= \mathrm{e}^{2^2} - \mathrm{e}^{(-2)^2}\\ &= \mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^4 = 0\end{aligned}$$

Question 3 (Réponse)

f est la fonction définie pour tout x de l'intervalle $]\,0;\ +\infty[$ par $f(x) = (2x+3)\ln x$. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]\,0;\ +\infty[$. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f. Pour tout nombre réel x de 'intervalle $]\,0;\ +\infty[$ on a :

(a) $f'(x) = \dfrac{2x+3}{x}$ (b) $f'(x) = \dfrac{2}{x}$

$\boxed{\text{(c) } f'(x) = 2\ln x + \dfrac{3}{x} + 2}$ (d) $f'(x) = 2\ln x + \dfrac{3}{x}$

Preuve.

$$f : \left\{\begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = (2x+3) \times \ln x \end{array}\right.$$

La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in\,]0\,;+\infty[\ ;\ f(x) = u(x) \times v(x)\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} u(x) = (2x+3) & ; & u'(x) = 2 \\ v(x) = \ln x & ; & v'(x) = \dfrac{1}{x}\end{array}\right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in\,]0\,;+\infty[,\ \ f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)\\ f'(x) &= 2 \times \ln x + (2x+3) \times \frac{1}{x}\\ f'(x) &= 2\ln x + \frac{2x}{x} + \frac{3}{x}\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in\,]0\,;+\infty[\ ;\ f'(x) = 2\ln x + \frac{3}{x} + 2}$$

Question 4 (Réponse d)

Une grandeur a été augmentée de 5 % la première année, puis de 7 % la deuxième année.
Sur ces deux années, le pourcentage global d'augmentation est égal à :

(a) 12 % (b) 35 % (c) 0,35 % $\boxed{\text{(d) } 12{,}35\,\%}$

Preuve.

Propriété 1

Si une quantité Q qui subit une évolution relative (hausse ou baisse) d'un taux de t_1 % suivie d'un autre évolution relative d'un taux de t_2 %,
alors cette quantité Q est multipliée par le coefficient $\left(1+t_1\ \%\right)\times\left(1+t_2\ \%\right)$.

$$Q \xrightarrow{\times\left(1+t_1\ \%\right)} Q\times(1+t_1\ \%) \xrightarrow{\times\left(1+t_2\ \%\right)} Q\times\left(1+t_1\ \%\right)\times\left(1+t_2\ \%\right)$$

Le coefficient multiplicateur associé à ces deux évolutions successives est :

$$k=\left(1+5\ \%\right)\times\left(1+7\ \%\right)=1,1235$$

Cela correspond donc à une augmentation de :

$$t\% = k-1 = 0,1235 = \underline{12,35\%}$$

Exercice 2. Probabilités 5 points

Commun à tous les candidats

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

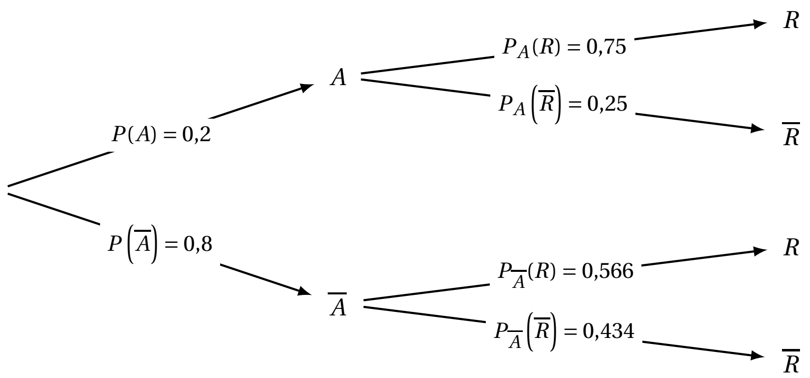
- *A « le candidat a suivi la filière AAC » et R « le candidat a été reçu à l'examen ».*

1.

1. a. Donner les probabilités $P(A)$, $P_A(R)$ et $P_{\overline{A}}(R)$.

- « *20 % des personnes qui se sont présentées à l'épreuve pratique du permis de conduire avaient suivi la filière de l'apprentissage anticipé de la conduite (AAC)* » donc : $\underline{P(A) = 0,2}$.
- « *Parmi ces candidats, 75 % ont été reçus à l'examen.* » donc : $\underline{P_A(R) = 0,75}$.
- « *Pour les candidats n'ayant pas suivi la filière AAC, le taux de réussite à l'examen était seulement de 56,6 %* » donc : $\underline{P_{\overline{A}}(R) = 0,566}$.

1. b. Traduire la situation par un arbre pondéré.



2.

2. a. Calculer la probabilité $P(A \cap R)$.

$$P(A \cap R) = P(A) \times P_A(R) = 0,2 \times 0,75 = \underline{0,15}$$

2. b. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.
Cela signifie que la probabilité que le candidat choisi ait suivi la filière AAC et qu'il ait été reçu à l'examen est égale à 0,15.

3. Justifier que $P(R) = 0,6028$.
Les évènements A et $\overline{A}$ formant une partition de l'univers, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(R \cap A) + P\left(R \cap \overline{A}\right)$$
$$P(R) = P(A) \times P_A(R) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(R)$$
$$P(R) = 0,2 \times 0,75 + 0,8 \times 0,566$$
$$P(R) = 0,15 + 0,4528$$
$$P(R) = 0,6028$$

4. Sachant que le candidat a été reçu à l'examen, calculer la probabilité qu'il ait suivi la filière AAC. On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près de cette probabilité.
La probabilité cherchée est $P_R(A)$ et l'on a :

$$P_R(A) = \frac{P(R \cap A)}{P(R)} = \frac{0,15}{0,6028} \approx \underline{0,2489}$$

Sachant que le candidat a été reçu à l'examen, la probabilité qu'il ait suivi la filière AAC est d'environ $\underline{0,2489}$.

Partie B

Un responsable d'auto-école affirme que pour l'année 2016, la probabilité d'être reçu à l'examen est égale à 0,62*. Ayant des doutes sur cette affirmation, une association d'automobilistes décide d'interroger* 400 *candidats à l'examen parmi ceux de 2016. Il s'avère que* 220 *d'entre eux ont effectivement obtenu le permis de conduire.*

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de candidats reçus dans un échantillon aléatoire de 400 candidats.

- **Analyse des données** :
  - « Sur un échantillon de $n = 400$ candidats. Il est constaté que 220 d'entre eux sont reçus à l'examen. ». Donc la fréquence observée candidats reçus à l'examen est
  $$f = 220 \div 400 = 0{,}55 \text{ soit } \underline{f = 0{,}55}$$
  - On veut tester l'hypothèse : « la proportion de candidats reçus à l'examen est $\underline{p = 62\%}$ ».
- **Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} ✓ & n \geq 30 \\ ✓ & np \geq 5 \\ ✓ & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \;;\; p + 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 400$, $p = 62$ %. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} ✓ & n = 400 \geq 30 \\ ✓ & np = 400 \times 0{,}62 = 248 \geq 5 \\ ✓ & n(1-p) = 400 \times 0{,}38 = 152 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \;;\; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0{,}62 - 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}62 \times 0{,}38}}{\sqrt{400}} \;;\; 0{,}62 + 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}62 \times 0{,}38}}{\sqrt{400}} \right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1{,}96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}57243$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}572}$.
- $p + 1{,}96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}66757$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}668}$.

$$\boxed{I_{400} \approx [0{,}572 \;;\; 0{,}668]}$$

2. Peut-on émettre des doutes sur l'affirmation du responsable de cette auto-école ? Justifier votre réponse.

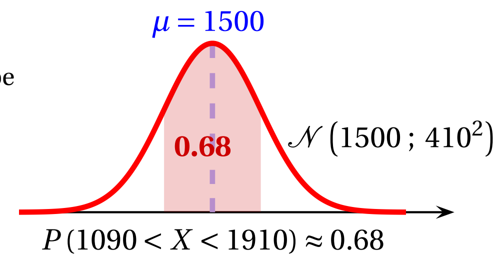
Conclusion

La fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle, $f = 0{,}55 \notin I$ donc le résultat du contrôle remet en question l'hypothèse, au seuil de 95%.

Partie C

Selon une enquête menée en 2013 par l'association « Prévention Routière », le coût moyen d'obtention du permis de conduire atteignait environ 1 500 €. On décide de modéliser le coût d'obtention du permis de conduire par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 1500$ et d'écart-type $\sigma = 410$.

1. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité que le coût du permis de conduire soit compris entre 1 090 € et 1 910 €.



La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 1500$ et d'écart-type $\sigma = 410$. La calculatrice nous donne à 10^{-2} près :

$$X \sim \mathcal{N}\left(1500\,;\,410^2\right) \Longrightarrow P(1090 < X < 1910) \approx \underline{0,68}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*(1090 , 1910 , 1500 , 410) ≈ <u>0,682 689</u>
- *Sur TI82/83+ : normalcdf*(1090 , 1910 , 1500 , 410) *ou (fr.) normalfrép*(1090 , 1910 , 1500 , 410)
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd ⇒ NormCD*(1090 , 1910, 410 , 1500)

2. Déterminer $P(X \leqslant 1\,155)$. On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.

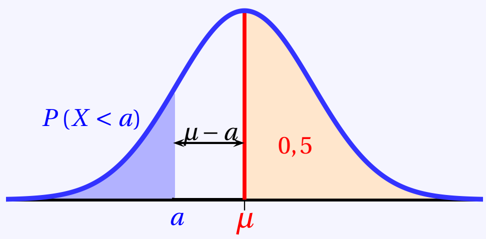
Propriété 2 ($P(X < a)$; $a < \mu$)

Si la variable X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

$$P\left(X < \mu\right) = 0,5 = P\left(X > \mu\right)$$

De plus pour tout réel a avec $a < \mu$:

$$\boxed{P(X < a) = 0,5 - P\left(a < X < \mu\right)}$$



Donc puisque ici $a = 1155 > \mu = 1500$ on a :

$$P(X \leqslant 1\,155) = 0,5 - P(\leqslant 1\,155 < X < 1\,500) \approx \underline{0,2}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 :* $\Big($0,5− *TIStat.normFDR*(1155 , 1500 , 1500 , 410) $\Big)$≈ <u>0,200 044</u>
- *Sur TI82/83+ : normalcdf*(1155 , 1500 , 1500 , 410) *ou (fr.) normalfrép*(1155 , 1500 , 1500 , 410)
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd ⇒ NormCD*(1155 , 1500, 410 , 1500)

3.

3. a. Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel a arrondi à l'unité, vérifiant $P(X \geqslant a) = 0,2$.

$$P(X \geq a) = 0,2 \Longleftrightarrow P(X < a) = 0,8$$

On cherche a tel que $P(X \leq a) = 0,8$ où X qui suit une loi normale $\mathcal{N}\left(1500\,;\,410^2\right)$. La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à 10^{-2} près :

$$\boxed{P(X \leq a) = 0,8 \Longleftrightarrow a \approx \underline{1,85}}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*(0.8 , 1500 , 410) ≈ <u>1,845 065</u>
- *Sur TI82/83+ : invNorm*(0.8 , 1500 , 410) *ou (fr.) FracNormale*(0.8 , 1500 , 410)
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN ⇒ InvNormCD*(0.8 , 410 , 1500)

3. b. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.
Cela signifie que la probabilité que la probabilité que le coût d'obtention du permis de conduire dépasse 1 845 € est de 20%.

©ISSN 2272-5318

Exercice 3. Obligatoire — 5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

En 2015, les forêts couvraient environ 4 000 millions d'hectares sur terre. On estime que, chaque année, cette surface diminue de 0,4 %. Cette perte est en partie compensée par le reboisement, naturel ou volontaire, qui est estimé à 7,2 millions d'hectares par an. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,996 \times u_n + 7,2$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, u_n permet d'obtenir une estimation de la surface mondiale de forêt, en millions d'hectares l'année $2015 + n$.

Notons pour tout entier n, U_n la surface mondiale de forêt, en millions d'hectares l'année $2015 + n$. En 2015, les forêts couvraient environ 4 000 millions d'hectares sur terre donc $U_0 = 4000$.
U_{n+1} la surface mondiale de forêt, en millions d'hectares l'année $2015+n+1$ s'obtient en effectuant une diminution de $0,4\%$ de la surface U_n de l'année précédente et en ajoutant 7,2 millions. Diminuer de $0,4\%$ c'est multiplier par $(1 - 0,4\%) = 0,996$ donc pour tout entier n : $U_{n+1} = 0,996\ U_n + 7,2$. On retrouve bien la définition de u_n.

2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il calcule et affiche la première année pour laquelle la surface totale de forêt couvre moins de 3 500 millions d'hectares sur terre.

Variables :	N est un entier naturel
	U est un nombre réel
Traitement :	n prend la valeur 0
	Tant que $U \geq 3500$ Faire
	U prend la valeur $0,996\ U + 7,2$
	N prend la valeur $N + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

3. *On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1800$.*

3. a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique puis préciser son premier terme et sa raison.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 4000 \\ u_{n+1} & = 0,996 \times u_n + 7,2 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - 1800 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1800 \\ v_{n+1} &= (0,996\ u_n + 7,2) - 1800 \\ v_{n+1} &= 0,996 \times u_n - 1792,8 \\ v_{n+1} &= 0,996 \times \left(u_n + \frac{-1792,8}{0,996} \right) \\ v_{n+1} &= 0,996 \times (u_n - 1800) \\ v_{n+1} &= 0,996 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,996$, et de premier terme $v_0 = 2200$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 1800 \\ v_0 &= 4000 - 1800 \\ v_0 &= 2200 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = 2200 \\ v_{n+1} & = 0,996 \times v_n \end{cases} \quad ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 2200 \times 0{,}996^n + 1800$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}996$, et de premier terme $v_0 = 2200$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\; v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\; \underline{v_n = 2200 \times (0{,}996)^n}$$

Or pour tout entier n on a :

$$v_n = u_n - 1800 \iff u_n = v_n + 1800$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; u_n = 2200 \times (0{,}996)^n + 1800}$$

3. c. Selon ce modèle et si le phénomène perdure, la surface des forêts sur terre va-t-elle finir par disparaître ? Justifier la réponse.

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

De ce fait, ici $-1 < q = 0{,}996 < 1$ et d'après le théorème 2 on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}996)^n = 0$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} 2\,200 \times (0{,}98)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} 2\,200 \times (0{,}98)^n + 1\,800 = 1\,800$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (u_n) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1800}$$

Sur le long terme la surface des forêts sur terre sera de 1 800 millions d'hectares. La surface des forêts sur terre ne va donc pas finir par disparaître.

4. Une étude montre que, pour compenser le nombre d'arbres détruits ces dix dernières années, il faudrait planter 140 millions d'arbres en 10 ans. En 2016 on estime que le nombre d'arbres plantés par l'Organisation des Nations unies (ONU) est de 7,3 milliards. On suppose que le nombre d'arbres plantés par l'ONU augmente chaque année de 10 %. L'ONU peut-elle réussir à replanter 140 millions d'arbres de 2016 à 2025 ? Justifier la réponse.

Notons w_n le nombre de milliards d'arbres plantés l'année $2016 + n$ par l'ONU. On a donc $w_0 = 7{,}3$.
On suppose que le nombre d'arbres plantés par l'ONU augmente chaque année de 10 % donc chaque terme de la suite (w_n) s'obtient en multipliant celui d'avant par $(1 + 10\%) = 1{,}1$.
La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison 1,1 et de premier terme $w_0 = 7{,}3$.
Le nombre d'arbre planté de 2016 à 2025 est donc :

$$S = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_8 + w_9$$

Propriété 3

La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est :

$$S = \text{premier terme de la somme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes de la somme}}}{1 - q}$$

En appliquant la propriété 3 on obtient :

$$S = w_0 \times \frac{1 - 1{,}1^{10}}{1 - 1{,}1} = 73 \times \left(1{,}1^{10} - 1\right) \approx \underline{116{,}34 < 140}$$

L'ONU ne pourra pas réussir à replanter 140 millions d'arbres de 2016 à 2025.

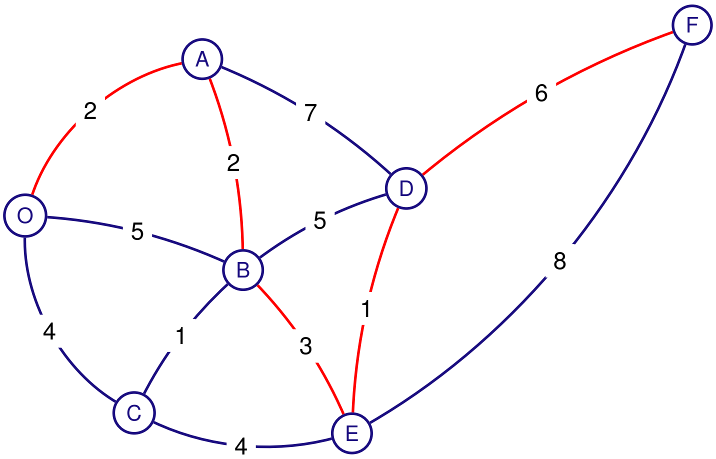
Exercice 3. Spécialité **5 points**

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Alex a téléchargé sur son smartphone un jeu lui permettant de combattre des animaux virtuels par localisation GPS. Le graphe pondéré représenté ci-dessous illustre le trajet qu'Alex doit suivre en marchant dans les rues de sa ville et le nombre d'animaux virtuels qu'il doit combattre sur la route suivie



À l'aide d'un algorithme, déterminer le nombre minimal de créatures qu'Alex doit combattre s'il part du point O pour arriver au point F de la ville. Détailler les étapes de l'algorithme.
Pour déterminer le trajet le plus rapide pour aller de O à F, on utilise l'algorithme de Dijkstra.
Remarque : L'algorithme porte le nom de son inventeur, l'informaticien néerlandais Edsger Dijkstra (1930-2002), et a été publié en 1959.

de ... à	A	B	C	D	E	F
O	**2(O)**	5(O)	4(O)	∞	∞	∞
A2		**4A**	4(O)	9A	∞	∞
B4			**4(O)**	9A	7B	∞
C4				9A	**7B**	∞
E7				**8E**		15E
E7						**14D**

Le chemin le plus court pour relier O à F est donc de <u>longueur 14</u>, ce qui donne le nombre minimal de créatures qu'Alex doit combattre :

$$\boxed{O \xrightarrow{2} A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{3} E \xrightarrow{1} D \xrightarrow{6} F}$$

Partie B

Alex retrouve d'autres personnes, ayant le même jeu, dans le parc de la ville dans le but de comparer le nombre de créatures qu'ils ont combattues. Le premier jour, 8 personnes se sont retrouvées dans le parc. Le second jour, on comptait 25 personnes et le troisième jour, 80 personnes se sont retrouvées dans le parc. Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels et x un nombre entier compris entre 1 et 10. On admet que la fonction f modélise le nombre de personnes qui se retrouvent dans le parc le x-ième jour.

1. Traduire l'énoncé par un système de trois équations à trois inconnues a, b et c.

f modélise le nombre de personnes qui se retrouvent dans le parc le x-ième jour.

- Le premier jour, 8 personnes se sont retrouvées dans le parc donc

$$f(1) = 8 \iff a \times 1^2 + b \times 1 + c = 8 \iff a + b + c = 8$$

- Le second jour, on comptait 25 personnes donc

$$f(2) = 25 \iff a \times 2^2 + b \times 2 + c = 25 \iff 4a + 2b + c = 25$$

- Le troisième jour, 80 personnes se sont retrouvées dans le parc donc

$$f(3) = 80 \iff a \times 3^2 + b \times 3 + c = 8 \iff 9a + 3b + c = 80$$

- On obtient donc le système :

$$\begin{cases} f(1) = 8 \\ f(2) = 25 \\ f(3) = 80 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} a + b + c = 8 \\ 4a + 2b + c = 25 \\ 9a + 3b + c = 80 \end{cases}}$$

2. Vérifier que ce système est équivalent à l'équation $AX = B$ avec : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}$

Avec les données on a :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b + c \\ 4a + 2b + c \\ 9a + 3b + c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Donc

$$AX = B \iff \begin{cases} a + b + c = 8 \\ 4a + 2b + c = 25 \\ 9a + 3b + c = 80 \end{cases}$$

3. *Soit la matrice* $M = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. a. Calculer $M \times A$.

$$M \times A = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. b. Que représente la matrice M pour la matrice A ?

La matrice M vérifie l'égalité $M \times A = Id_3$. On sait que par théorème, elle vérifie alors aussi l'égalité $A \times M = Id_3$ et donc que M est la matrice inverse de la matrice A, c'est à dire que $M = A^{-1}$.

4. Á l'aide d'un calcul matricielle, déterminer les valeurs des nombres a, b et c ?

On va résoudre le système.

$$\begin{aligned}
AX = B &\iff A^{-1}\times AX = A^{-1}\times B\\
&\iff \underbrace{A^{-1}\times A}_{Id_3}\times X = A^{-1}\times B\\
&\iff X = A^{-1}\times B\\
&\iff X = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5\\ -2,5 & 4 & -1,5\\ 3 & -3 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}8\\25\\80\end{pmatrix}\\
&\iff X = \begin{pmatrix}19\\-40\\29\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De ce fait :

$$\begin{cases} a = 19\\ b = -40\\ c = 29\end{cases} \implies \underline{f(x) = 19x^2 - 40x + 29}$$

5. Le parc de la ville a une capacité d'accueil de 2 500 personnes. Selon ce modèle, le parc risque-t-il de refuser d'accueillir des personnes un de ces dix jours ? Justifier la réponse.

La fonction f est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + d$ avec :

$$\left.\begin{cases} a = 19 > 0\\ b = -40\\ c = 29\end{cases}\right| \implies \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{20}{19} \approx 1,05$$

Puisque $a = 19$ est positif, la fonction f est décroissante sur $\left[1\,;\,\frac{20}{19}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{20}{19}\,;\,10\right]$ soit :

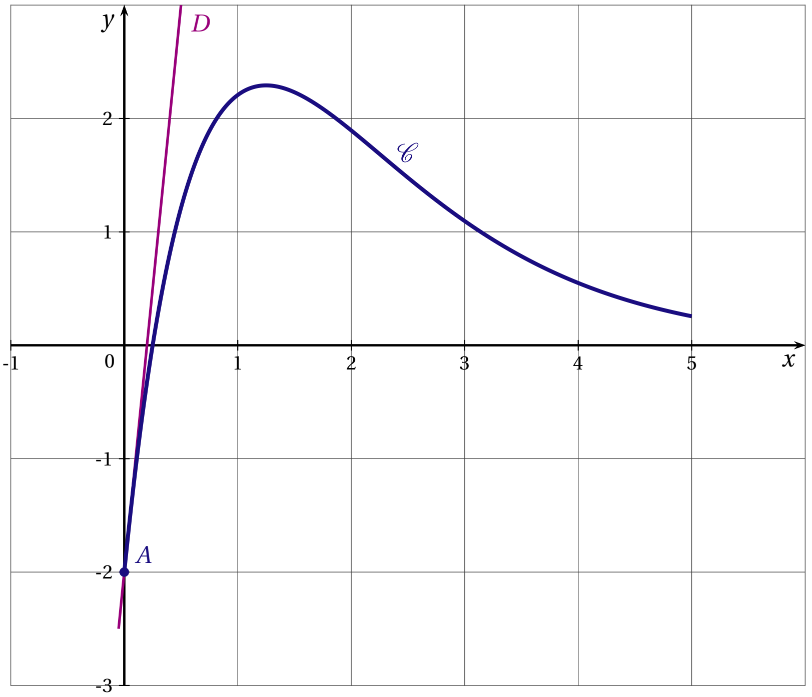
x	1	$\frac{20}{19} \approx 1.05$	10
Variations de f	8 ↘	$\frac{151}{19} \approx 7.95$	↗ 1529

Sur l'intervalle $[1\,;\,10]$, le maximum de la fonction f est 1 529 (atteint pour $x = 10$) donc selon ce modèle, le parc, qui a une capacité d'accueil de 2 500 personnes, ne risque pas de refuser d'accueillir des personnes un de ces dix jours.

Exercice 4. 6 points

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0;5]$ par $f(x) = (ax-2)\,e^{-x}$, où a est un nombre réel. On admet dans tout l'exercice que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0;5]$. La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O.



Les courbes $\mathscr{C}$ et D passent toutes les deux par le point $A(0;-2)$. La droite D est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A et admet pour équation $y = 10x-2$. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

- Le point $A(0\,;\,-2)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$ donc $\underline{f(0) = -2}$.
- La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A admet pour équation $y = 10x-2$. Donc $\underline{f'(0) = 10}$ car c'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

2.

2. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,5]$ on a : $f'(x) = (-ax+a+2)\,\mathrm{e}^{-x}$.

$$f : \begin{cases} [0;5] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \quad f(x) = (ax-2)\times \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $[0;5]$.
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v+uv'$ avec :

$$\forall x \in [0;5]\ ;\ f(x) = u(x)\times v(x)\ :\ \begin{cases} u(x) = (ax-2) & ; \quad u'(x) = a \\ v(x) = \mathrm{e}^{-x} & ; \quad v'(x) = (-\mathrm{e}^{-x}) \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall x \in [0;5],\ f'(x) = u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x)$$
$$f'(x) = a\times \mathrm{e}^{-x} + (ax-2)\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0;5]\ ;\ f'(x) = (-ax+a+2)\,\mathrm{e}^{-x}}$$

2. b. Déduire des questions précédentes que $a = 8$.

On a vu lors de la question (1.) que $f'(0) = 10$ soit

$$f'(0) = 10 \iff (-a \times 0 + a + 2) \times \mathrm{e}^{-0} = 10 \iff a + 2 = 10 \iff \underline{a = 8}$$

2. c. Donner l'expression de $f'(x)$.

Puisque $a = 8$ on a pour tour réel x de $[0\,;5]$,

$$f'(x) = \underline{(-8x + 10) \times \mathrm{e}^{-x}}$$

3.

3. a. Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;5]$. On pourra faire un tableau.

La fonction dérivée f' s'exprime comme produit de deux facteurs. Le facteur e^{-x} est strictement positif sur $[0\,;5]$ car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. De ce fait, f' est du signe du facteur $(-8x+10)$ dont l'étude du signe est aisée.

$$\begin{cases} -8x + 10 = 0 \iff x = \dfrac{5}{4} \\ -8x + 10 < 0 \iff x > \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Donc on a :

x	0		$\frac{5}{4} = 1.25$		5
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	

3. b. En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.

x	0		$\frac{5}{4} = 1.25$		5
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	-2	$\nearrow$	$8\,\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}} \approx 2.3$	$\searrow$	$38\,\mathrm{e}^{-5} \approx 0.26$

Avec pour x de $[0\,;5]$:

$$f(x) = (8x - 2) \times \mathrm{e}^{-x} \Longrightarrow \begin{cases} f(0) = -2 \\ f\left(\dfrac{5}{4}\right) = 8\,\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}} \approx 2.3 \\ f(5) = 38\,\mathrm{e}^{-5} \approx 0.26 \end{cases}$$

3. c. Résoudre sur l'intervalle $[0\,;5]$ l'équation $f(x) = 0$.

La fonction f s'exprime comme un produit de deux facteurs dont l'un est strictement positif, donc pour tout réel x de $[0\,;5]$ on a :

$$f(x) = 0 \iff (8x - 2) \times \mathrm{e}^{-x} = 0$$

Or la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, (donc jamais nulle) soit

$$f(x) = 0 \iff (8x - 2) = 0$$

$$f(x) = 0 \iff \boxed{x = \frac{1}{4} = 0{,}25 \in [0\,;5]}$$

4. *À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants :*

1	$g(x) := (-8 * x + 10) * \exp(-x)$ $\rightarrow g(x) := (-8x + 10)\,\mathrm{e}^{-x}$
2	Dériver $\left[g(x), x\right]$ $\rightarrow (8 * x - 18) * \exp(-x)$
3	Résoudre $\left[(8 * x - 18) * \exp(-x) > 0, x\right]$ $\rightarrow x > 9/4$

En utilisant ces résultats :

4. a. Donner l'expression de f'', fonction dérivée seconde de la fonction f.

La ligne 1 du logiciel affecte à $g(x)$ l'expression de $f'(x)$ calculée lors de la question (2c). La ligne 2 effectue le calcul de la dérivée de g, donc de la dérivée seconde de f. On a donc pour tout réel x de $[0; 5]$:

$$f''(x) = \underline{(8x - 18) \times \mathrm{e}^{-x}}$$

4. b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion dont on donnera la valeur exacte de l'abscisse.

La ligne 3 du logiciel permet la résolution de l'inéquation $f''(x) > 0$, soit

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x > \frac{9}{4}$$

On pourrait aussi résoudre l'équation $f''(x) = 0$ et en déduire que :

$$\left\{\begin{array}{l} f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x > \dfrac{9}{4} \\[2ex] f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{9}{4} \end{array}\right| \Longrightarrow f''(x) < 0 \Longleftrightarrow x < \frac{9}{4}$$

Et donc l'étude du signe de la drivée seconde permet l'étude de la convexité de f.

x	0		$\frac{9}{4} = 2.25$		5
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Convexité de f		f concave	(Pt Infl.)	f convexe	

La fonction dérivée s'annule en changeant de signe en $x = \dfrac{9}{4}$ donc la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion d'abscisse $x = \dfrac{9}{4} = 2.25$.

5. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour x milliers de grille-pains (où x est un nombre réel de l'intervalle $[0; 5]$), alors le bénéfice quotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par : $f(x) = (8x - 2)\,\mathrm{e}^{-x}$.

5. a. Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal ?

On reprend l'étude des variation de f proposée lors de la question (3b). Le maximum de f est atteint $x = \dfrac{5}{4} = 1,25$.

Donc puisque x est en milliers d'unités, la quantité de grille-pains que l'entreprise doit fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal est de 1,25 milliers soit <u>1 250</u>.

5. b. Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal ? On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.

On a

$$f(1,25) = 8\,\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}} \approx 2.29204$$

Donc puisque $f(x)$ est en centaines de milliers d'euros, ce bénéfice maximal est de $f(1,25)$ centaines de milliers d'euros soit, arrondi à l'euro près, de :

$$10^5 \times f(1,25) \approx \underline{229204 €}$$

Fin du devoir