Baccalauréat 2015 - ES/L
Nouvelle Calédonie

Série ES/L Obli. et Spé.
5 Mars 2015

Exercice 1. 5 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle [1,5 ; 6] par :

$$f(x) = (25x - 32)\mathrm{e}^{-x}.$$

On a utilisé un logiciel pour déterminer, sur l'intervalle [1,5 ; 6], sa fonction dérivée f' et sa fonction dérivée seconde f''.
On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.
On a obtenu les résultats suivants qui pourront être utilisés sans justification dans tout l'exercice.

- $f'(x) = (57 - 25x)\mathrm{e}^{-x}$
- $f''(x) = (25x - 82)\mathrm{e}^{-x}$

1.

1. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [1,5 ; 6].

1. b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [1,5 ; 6] (Les valeurs seront, si nécessaire, arrondies au centième).

2. Montrer que, sur l'intervalle [1,5 ; 6], la courbe C admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

3. Dans cette question, on s'intéresse à l'équation $f(x) = 1$.

3. a. Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle [4 ; 5].

3. b. On a écrit l'algorithme suivant permettant de déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle [4 ; 5].

Initialisation
a prend la valeur 4
b prend la valeur 5

Traitement
Tant que $b - a > 0,1$ faire
    y prend la valeur $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
    Si $y > 1$ alors
        a prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
    Sinon b prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
Fin de Tant que
Sortie
Afficher $\frac{a+b}{2}$

Exécuter l'algorithme précédent en complétant le tableau donné en annexe.

3. c. Donner une valeur approchée de α au dixième.

Exercice 2. 5 points

Commun à tous les candidats

Une entreprise est spécialisée dans la distribution de pommes et la fabrication de jus de pomme.
Elle s'approvisionne en pommes auprès de différents producteurs régionaux.
L'entreprise dispose d'une machine destinée à tester la conformité des pommes ; celles que la machine accepte seront vendues sans transformation ; les autres serviront à produire du jus de pomme en bouteille. Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : sélection des pommes

Une étude a montré que 86 % des pommes fournies par les différents producteurs sont conformes, Les tests étant réalisés très rapidement, la machine commet quelques erreurs :

- 3 % des pommes effectivement conformes sont rejetées à tort par la machine ;
- 2 % des pommes non conformes sont acceptées à tort par la machine.

On prélève au hasard dans le stock de l'entreprise une pomme qui va être testée par la machine.
On note les évènements suivants :

- C : « La pomme prélevée est conforme » ;
- T : « La pomme est acceptée par la machine ».

$\overline{C}$ et $\overline{T}$ sont respectivement les évènements contraires des évènements C et T.
Pour répondre aux questions suivantes, on pourra représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

1. Déterminer la probabilité que la pomme prélevée soit conforme et soit acceptée par la machine.

2. Montrer que $P(T)$,la probabilité de T, est égale à $0,837$.

3. La pomme prélevée est acceptée par la machine. Quelle est la probabilité qu'elle soit conforme ? (On donnera une valeur décimale approchée au millième)

Partie B : contrôle d'un fournisseur

L'entreprise a un doute sur la qualité des pommes fournies par l'un de ses fournisseurs, et elle envisage de s'en séparer.
Elle procède donc à un contrôle en prélevant, au hasard, un échantillon de 80 pommes et en vérifiant manuellement la conformité de chaque pomme.
On formule l'hypothèse que 86 % des pommes de ce fournisseur sont conformes.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de pommes conformes contenues dans un lot de 80 pommes. (*Les bornes de l'intervalle seront arrondies au millième*).

2. L'entreprise a constaté que seulement 65 pommes de l'échantillon étaient conformes.
Quelle décision est-elle amenée à prendre ?

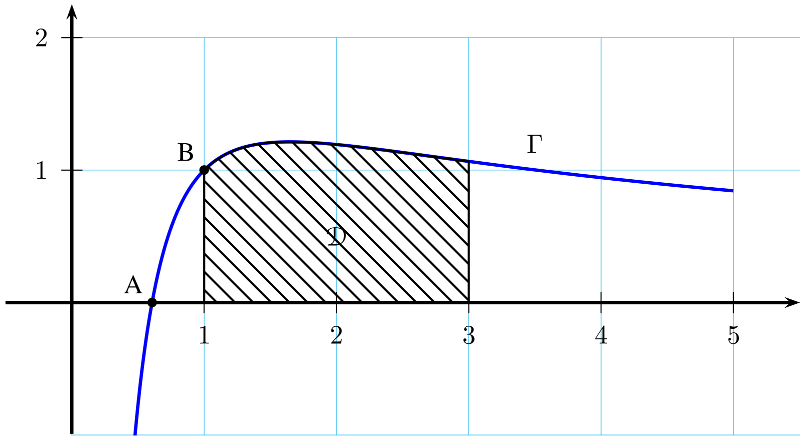
Exercice 3. 5 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction g, définie et dérivable sur l'intervalle [0,5 ; 5], et telle que pour tout nombre réel x, on a :

$$g(x) = \frac{2\ln(x) + 1}{x}.$$

On note g' sa fonction dérivée et Γ sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.
Soit B le point de Γ d'abscisse 1 ; la droite (OB) est tangente en B à la courbe Γ.



1. Déterminer les coordonnées exactes du point A, point d'intersection de la courbe Γ avec l'axe des abscisses.

2.

2. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle [0,5 ; 5], on a $g'(x) = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^2}$.

2. b. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle [0,5 ; 5].

2. c. En déduire les variations de g sur l'intervalle [0,5 ; 5].

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe Γ au point B d'abscisse 1.

4.

4. a. On note $\mathcal{D}$ le domaine défini par l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
Par lecture graphique, encadrer par deux entiers l'aire de $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire.

4. b. On définit la fonction G sur l'intervalle [0,5 ; 5] par

$$G(x) = \ln(x)[\ln(x) + 1].$$

Montrer que G est une primitive de g sur l'intervalle [0,5 ; 5].

4. c. Déterminer l'aire de $\mathcal{D}$ exprimée en unités d'aire.

Exercice 4. Obligatoire 5 points

Enseignement obligatoire

Dans une grande entreprise, les commerciaux ont le choix de services de téléphonie mobile exclusivement entre deux opérateurs concurrents : A et B.
On s'intéresse aux parts de marché de ces deux opérateurs chez les commerciaux de cette entreprise.
Chaque commercial dispose d'un seul abonnement chez l'un ou l'autre des opérateurs : A et B.
Les abonnements sont souscrits pour une période d'un an, à partir du 1er janvier.
Une statistique, menée sur les choix des commerciaux, a révélé que :

- parmi les abonnés de l'opérateur A, 18 % d'entre eux, en fin d'année, changent d'opérateur ;
- parmi les abonnés de l'opérateur B, 22 % d'entre eux, en fin d'année, changent d'opérateur.

On admet que les mouvements d'abonnés d'un opérateur à l'autre se poursuivront dans ces proportions dans les années à venir.
De plus on sait qu'au 1er janvier 2014, 40 % des commerciaux avaient souscrit un abonnement chez A et 60 % chez B.
On note, pour tout entier naturel n :

- u_n la proportion de commerciaux disposant d'un abonnement chez A au 1er janvier de l'année $2014 + n$:
- v_n la proportion de commerciaux disposant d'un abonnement chez B au 1er janvier de l'année $2014 + n$.

On a donc $u_0 = 0,4$ et $v_0 = 0,6$.

1. Justifier que $u_{n+1} = 0,82u_n + 0,22v_n$ et que $u_n + v_n = 1$.

2. En déduire que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,6u_n + 0,22$.

3. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_n - 0,55$$

3. a. Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

3. b. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

3. c. Montrer que pour tout entier naturel $n,\ u_n = 0,55 - 0,15 \times (0,6)^n$.

4. Conjecturer la limite de la suite (u_n). Comment interpréter ce résultat sur l'évolution des parts de marché dans les années futures ?

Exercice 4. Spécialité — 5 points

Enseignement de spécialité

Une société est spécialisée dans la vente en ligne de produits de haute technologie sur internet.

Partie A

La société réalise tout au long de l'année des journées promotionnelles pour attirer ses clients sur son site internet. Elle leur envoie un courrier électronique annonçant chaque journée de promotion. Parmi les clients, 5% d'entre eux ont visité le site internet de la société lors de la première journée de promotion. Une étude portant sur le comportement des clients auxquels la société a envoyé ce type de message a mis en évidence que :

- trois clients sur cinq ayant visité le site internet lors d'une journée promotionnelle, le visitent à nouveau lors de 1ère journée promotionnelle suivante ;
- un client sur cinq n'ayant pas visité le site internet lors d'une journée promotionnelle, le visite lors de la journée promotionnelle suivante.

On choisit au hasard, un client ayant reçu le message annonçant la première journée promotionnelle. On formule l'hypothèse que les comportements des clients observés lors de l'étude n'évoluent pas d'une journée promotionnelle à la suivante. Pour tout entier naturel n non nul, on note l'état probabiliste ainsi défini par la matrice ligne $P_n = (x_n \;\; y_n)$, où x_n désigne la probabilité que le client, pris au hasard, visite le site internet de la société lors de la n-ième journée de promotion.

1. Pour une journée promotionnelle donnée, on note V , l'évènement « le client a visité le site internet lors de la journée promotionnelle ». Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets V et $\overline{V}$.

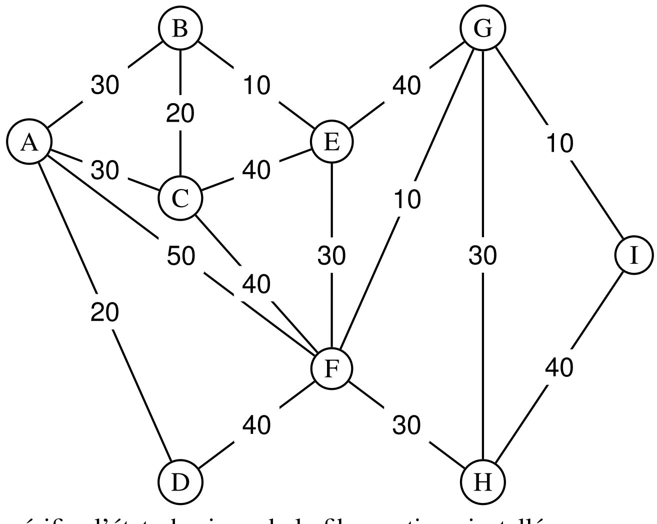
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en prenant les sommets V et $\overline{V}$ dans cet ordre.

3. En remarquant que $P_1 = (0,05 \;\; 0,95)$, déterminer P_2. Interpréter ce résultat.

4. On admet que le taux de visites se stabilise à long terme. Montrer que $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ est un état stable de ce système.

Partie B

Le réseau informatique de cette société est constitué d'un ensemble de routeurs inter connectés à l'aide de fibres optiques haut débit. Le graphe qui suit schématise l'architecture de ce réseau. Les sommets représentent les routeurs et les arêtes représentent les fibres optiques. On a fait figurer les durées de transfert des données (en millisecondes) d'un routeur à un autre sur les fibres optiques du réseau de la société.



1. Chaque année la société doit vérifier l'état physique de la fibre optique installée sur son réseau. Un robot inspecte toute la longueur de la fibre optique afin de s'assurer qu'elle ne présente pas de détérioration apparente.
Peut-il parcourir l'ensemble du réseau en suivant les fibres optiques et en empruntant chaque fibre optique une et une seule fois ? Justifier la réponse.
Si un tel parcours est possible, préciser par quel(s) routeur(s) du réseau le robot doit commencer son inspection.

2. Un ordinateur, relié au routeur A envoie un paquet de données à un ordinateur relié au routeur I.
Le paquet de données a mis 70 ms pour transiter du routeur A au routeur I.
Ce paquet de données a-t-il emprunté le chemin le plus rapide sur le réseau ? Justifier la réponse.

ANNEXE (A rendre avec la copie)

	$\dfrac{a+b}{2}$	y à 10^{-3} près	a	b	$b-a$	Sortie
Initialisation			4	5	1	
1re boucle	$4,5$	$0,894$	4	$4,5$	$0,5$	
2e boucle						
3e boucle						
4e boucle						