Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2015 - ES/L Nouvelle Calédonie

Série ES/L Obli. et Spé.
5 Mars 2015
Correction

Exercice 1. 5 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle [1,5 ; 6] par :

$$f(x) = (25x - 32)\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet les résultats suivants :

$$f'(x) = (57 - 25x)\mathrm{e}^{-x} \; ; \; f''(x) = (25x - 82)\mathrm{e}^{-x}$$

1.

1. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [1,5 ; 6].

On sait que :

$$\forall x \in [1,5\ ;\ 6]\ ;\ f'(x) = (57 - 25x)\,\mathrm{e}^{-x}$$

Or

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \mathrm{e}^{-x} > 0$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $(57 - 25x)$ soit :

$$\left.\begin{array}{l} 57 - 25x > 0 \Longleftrightarrow x < \dfrac{57}{25} \\ 57 - 25x = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{57}{25} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad 57 - 25x < 0 \Longleftrightarrow x > \dfrac{57}{25}$$

De ce fait on obtient facilement sur l'intervalle [1,5 ; 6] :

x	$1,5$		$\frac{57}{25}$		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

1. b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [1,5 ; 6].

On a :

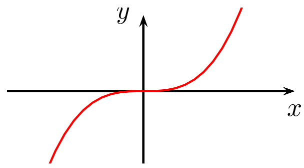
$$f(1,5) = 5,5\,\mathrm{e}^{-1,5} \approx 1,23\ ;\ f\left(\frac{57}{25}\right) = 25\,\mathrm{e}^{-\frac{57}{25}} \approx 2,56 \;\text{ et }\; f(6) = 118\,\mathrm{e}^{-6} \approx 0,29$$

x	1.5		$\frac{57}{25}$		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$f(1.5) \approx 1.23$	$\nearrow$	$f\left(\frac{57}{25}\right) \approx 2.56$	$\searrow$	$f(6) \approx 0.29$

2. Montrer que, sur l'intervalle [1,5 ; 6], la courbe C admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

Définition 1 (Point d'inflexion d'une fonction numérique)

- Si, en un point de la courbe représentative d'une fonction continue, la concavité passe du type « convexe » au type « concave » (ou l'inverse), on appelle ce point, **point d'inflexion de la courbe**.
- Graphiquement, un point d'inflexion est un point où la tangente coupe la courbe.
- En un point d'inflexion, **la dérivée seconde, si elle existe, s'annule et change de signe**.



La fonction cube $x \mapsto x^3$ présente un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

Dans le cas présent, la fonction numérique f est continue et dérivable deux fois sur l'intervalle [1,5 ; 6] d'après les prérequis. La courbe représentative de f admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si la dérivée seconde de la fonction s'annule et change de signe en a.

On sait que

$$\forall x \in [1,5\,;\,6]\,;\; f''(x) = (25x - 82)\,\mathrm{e}^{-x}$$

Or l'exponentielle est toujours strictement positive sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}\,;\; \mathrm{e}^{-x} > 0$$

Donc $f''(x)$ est du signe de $(25x - 82)$ qui s'annule et change de signe pour $x = \dfrac{82}{25}$.

$$\boxed{\text{Sur l'intervalle } [1,5\,;\,6]\text{, la courbe } C \text{ admet donc un unique point d'inflexion d'abscisse } \frac{82}{25}.}$$

3. Dans cette question, on s'intéresse à l'équation $f(x) = 1$.

3. a. Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle [4 ; 5].

Théorème 1 (Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

- La fonction f est **continue** (car dérivable) et **strictement décroissante** sur l'intervalle $[4\,;\,5]$;
- L'image par f de l'intervalle $[4\,;\,5]$ est $[f(5)\,;\,f(4)]$ d'après le tableau de variations.
- Le réel $k = 1$ appartient à l'intervalle image car $f(5) \approx 0,63 < 1 < f(4) \approx 1,25$

Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = k = 1$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[4\,;\,5]$.

x	$\frac{57}{25} = 2.28$	4	α	5	6
$f'(x)$	0		$-$		
f	$f\left(\frac{57}{25}\right)$	$f(4) \approx 1.25$	1	$f(5) \approx 0.63$	$f(6)$

3. b. On a écrit l'algorithme suivant permettant de déterminer une valeur approchée de α.

Initialisation
a prend la valeur 4
b prend la valeur 5

Traitement
Tant que $b - a > 0,1$ faire
    y prend la valeur $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
    Si $y > 1$ alors
        a prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
    Sinon b prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
Fin de Tant que
Sortie
Afficher $\frac{a+b}{2}$

Exécuter l'algorithme précédent en complétant le tableau donné en annexe.
Il s'agit d'une recherche de valeurs approchées de solutions d'équation par **dichotomie**.

	$\frac{a+b}{2}$	y à 10^{-3} près	a	b	$b-a$	Sortie
Initialisation			4	5	1	
1re boucle « Tant que »	4,5	0,894	4	4,5	0,5	
2e boucle « Tant que »	4,25	1,059	4,25	4,5	0,25	Non
3e boucle « Tant que »	4,375	0,974	4,25	4,375	0,125	Non
4e boucle « Tant que »	4,3125	1,016	4,3125	4,375	0,0625	Oui

3. c. Donner une valeur approchée de α au dixième.
Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

Avec un pas de $\Delta = 0,1$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(4,3) & \approx & 1,0244 > 1 \\ f(4,4) & \approx & 0,9576 < 1 \end{array}\right., \text{ donc } 4,3 < \alpha < 4,4.$$

Une valeur approchée de α au dixième est donc par exemple $4,30$

$$\boxed{\alpha \approx 4,3}$$

Remarque : La calculatrice donne la valeur approchée de 4,335 974 279 86

Exercice 2. Probabilités 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A : sélection des pommes

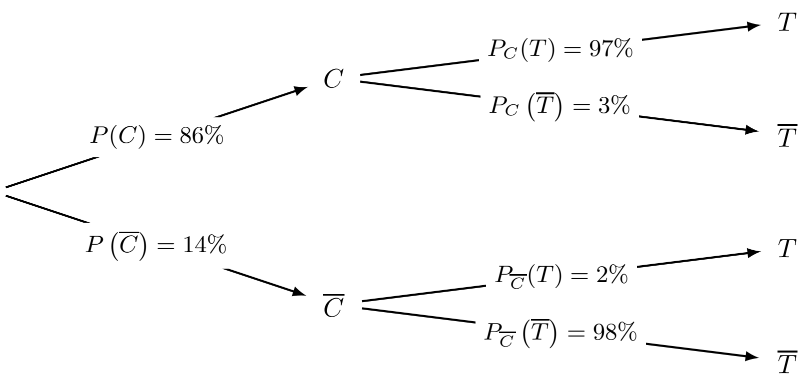
Une étude a montré que 86 % des pommes fournies par les différents producteurs sont conformes.
On note les évènements suivants :

- C : « La pomme prélevée est conforme » ;
- T : « La pomme est acceptée par la machine ».

1. Déterminer la probabilité que la pomme prélevée soit conforme et soit acceptée par la machine.
Exprimons les données de l'exercice avec les notations.

- 86 % des pommes sont conformes donc avec les notations de l'exercice : $P(C) = 86\%$;
- 3 % des pommes effectivement conformes sont rejetées à tort par la machine soit $P_C(\overline{T}) = 3\%$;
- 2 % des pommes non conformes sont acceptées à tort par la machine soit $P_{\overline{C}}(T) = 2\%$.

Représentons la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



La probabilité que la pomme prélevée soit conforme et soit acceptée par la machine correspond à $P\left(C \cap T\right)$, or :

$$P\left(C \cap T\right) = P(C) \times P_C(T) = 0,86 \times 0,97$$

soit

$$\boxed{P\left(C \cap T\right) = 0{,}834\,2 = 83,42\%}$$

2. Montrer que $P(T)$, la probabilité de T, est égale à $0,837$.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(T) &= P\left(C \cap T\right) + P\left(\overline{C} \cap T\right) \\
P(T) &= 0{,}834\,2 + P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(T) \\
P(T) &= 0{,}834\,2 + 0,14 \times 0,02 \\
P(T) &= 0{,}834\,2 + 0{,}002\,8 = 0,837
\end{aligned}$$

$$\boxed{P\left(T\right) = 0,837 = 83,7\%}$$

3. La pomme prélevée est acceptée par la machine. Quelle est la probabilité qu'elle soit conforme ? (*au millième*)
La probabilité cherchée est avec les notations : $P_T(C)$ or :

$$\begin{aligned}
P_T(C) &= \frac{P\left(T \cap C\right)}{P(T)} \\
P_T(C) &= \frac{0{,}834\,2}{0{,}837}
\end{aligned}$$

On a donc, arrondi au millième :

$$\boxed{P_T(C) \approx 0,997}$$

Partie B : contrôle d'un fournisseur

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de pommes conformes contenues dans un lot de 80 pommes. (*Les bornes de l'intervalle seront arrondies au millième*).

Théorème 2 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

- L'entreprise procède à un contrôle en prélevant, au hasard, un échantillon de 80 pommes, donc $n = 80$.
- On formule l'hypothèse que 86 % des pommes de ce fournisseur sont conformes , donc $p = 86\% = 0,86$.

Vérifions les hypothèses du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 80 \geq 30 \\ \checkmark & np = 80 \times 86\% = 68,80 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 80 \times 14\% = 11,2 \geq 5 \end{cases}$$

Les conditions d'application du théorème étant vérifiées, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% de la fréquence des pommes conformes dans un échantillon de taille $n = 80$ est est :

$$I_{80} = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,86 - 1,96\frac{\sqrt{0,86 \times 0,14}}{\sqrt{80}} \ ; \ 0,86 + 1,96\frac{\sqrt{0,86 \times 0,14}}{\sqrt{80}} \right]$$

soit

$$\boxed{I \approx [0,783\,;\,0,937]}$$

2. L'entreprise a constaté que seulement 65 pommes de l'échantillon étaient conformes. Quelle décision est-elle amenée à prendre ?

La fréquence observée de pommes conformes est donc

$$\boxed{f = \frac{65}{80} = 0{,}812\,5 \in I}$$

Cette fréquence appartient à l'intervalle I donc **il n'y a pas de raison, au vu de l'échantillon étudié, de remettre en cause l'hypothèse selon laquelle 86 % des pommes sont conformes**.

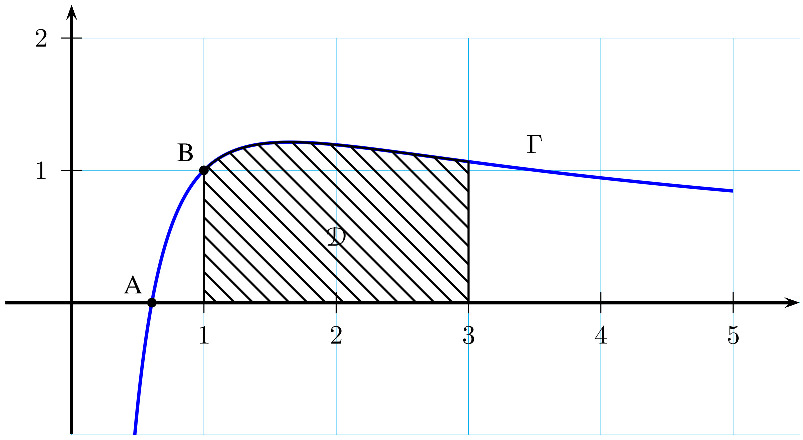
Exercice 3. Fonction — 5 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction g, définie et dérivable sur l'intervalle [0,5 ; 5], et telle que pour tout nombre réel x, on a :

$$g(x) = \frac{2\ln(x)+1}{x}.$$

Soit B le point de Γ d'abscisse 1 ; la droite (OB) est tangente en B à la courbe Γ.



1. Déterminer les coordonnées exactes du point A, point d'intersection de la courbe Γ avec l'axe des abscisses.

Le point A d'intersection de la courbe Γ avec l'axe des abscisses a pour ordonnée 0 ; son abscisse est solution de l'équation $g(x) = 0$. Pour tout x de $[0,5\,;\,5]$ on a :

$$g(x) = 0 \iff \frac{2\ln(x)+1}{x} = 0 \iff 2\ln(x)+1 = 0 \iff \ln(x) = -\frac{1}{2} \iff x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

On vérifie bien que la solution obtenue appartient à l'intervalle $[0,5\,;\,5]$:

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 0,6 \in [0,5\,;\,5]$$

Les coordonnées de A sont donc :

$$\boxed{A\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\,;\,0\right)}$$

2.

2. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle [0,5 ; 5], on a $g'(x) = \dfrac{1-2\ln(x)}{x^2}$.

La fonction g est dérivable sur $[0,5\,;\,5]$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle.

La fonction g est de la forme $\frac{u}{v}$ donc de dérivée $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec :

$$\forall x \in [0,5\,;\,5]\,;\; g(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad : \quad \begin{cases} u(x) = 2\ln(x)+1 & ; \quad u'(x) = \dfrac{2}{x} \\ v(x) = x & ; \quad v'(x) = 1 \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall x \in [0,5\,;\,5],\quad g'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{2}{x}\times x - (2\ln x + 1)}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{2 - 2\ln x - 1)}{x^2}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,5\,;\,5],\quad g'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x^2}}$$

2. b. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle [0,5 ; 5].

On a vu que :

$$\forall x \in [0,5\ ;\ 5],\ \ g'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x^2}$$

Donc le dénominateur étant le carré d'un réel de l'intervalle [0,5 ; 5], il est toujours strictement positif. La dérivée de g est donc du signe de son numérateur $(1-2\ln(x))$.

- On a pour tout réel x de l'intervalle [0,5 ; 5] :

$$1-2\ln(x)=0 \iff 2\ln x = 1$$
$$1-2\ln(x)=0 \iff \ln x = \frac{1}{2}$$

En composant par la fonction exp définie sur $\mathbb{R}$, on a :

$$1-2\ln(x)=0 \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

Donc

$$\forall x \in [0,5\ ;\ 5]\ ;\ \boxed{g'(x)=0 \iff \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \approx 1,6}$$

- En outre pour tout réel x de l'intervalle [0,5 ; 5] :

$$1-2\ln(x)>0 \iff -2\ln x > -1$$
$$1-2\ln(x)>0 \iff \ln x < \frac{1}{2}$$

En composant par la fonction exp définie et croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$1-2\ln(x)>0 \iff x < \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

$$\forall x \in [0,5\ ;\ 5]\ ;\ \boxed{g'(x)>0 \iff x < \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}$$

En conséquence sur l'intervalle [0,5 ; 5] :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} g'(x)>0 \iff 0,5 < x < \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \\ g'(x)=0 \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \approx 1,6 \end{array}\right\} \implies\ g'(x)<0 \iff \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} < x < 5}$$

2. c. En déduire les variations de g sur l'intervalle [0,5 ; 5].

D'après ce qui précède, la fonction g est croissante sur $\left[0,5\ ;\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ 5\right]$.

x	0.5		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		5
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g	$g(0.5) \approx -0.77$	$\nearrow$	$g\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) \approx 1.2$	$\searrow$	$g(5) \approx 0.84$

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe Γ au point B d'abscisse 1.

Propriété 1 (Tangente à $\mathscr{C}_g$ en B)

Si g est dérivable en a alors, la **tangente** à la courbe Γ au point B d'abscisse a est la droite qui passe par B et qui a pour cœfficient directeur $g'(a)$. Son équation est donnée par :

$$\boxed{T\ :\ y = g'(a)(x-a)+g(a)}$$

On cherche l'équation de la tangente à Γ au point B d'abscisse $a=1$. Cette équation est d'après la propriété précédente :

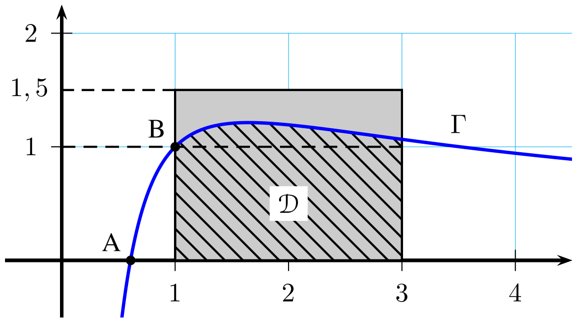
$$y = g'(1)(x-1)+g(1)\ ;\ \text{ avec } \begin{cases} g(1) &= 1 \\ g'(1) &= 1 \end{cases}$$
$$y = 1(x-1)+1$$

La tangente en B est donc la première bissectrice d'équation :

$$\boxed{y=x}$$

4.

4. a. On note $\mathcal{D}$ le domaine défini par l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$. Par lecture graphique, encadrer par deux entiers l'aire de $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire.



Par lecture graphique, on peut voir que l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est comprise entre 2 et 3 unités d'aire.

4. b. On définit la fonction G sur l'intervalle [0,5 ; 5] par : $G(x) = \ln(x)[\ln(x) + 1]$
Montrer que G est une primitive de g sur l'intervalle [0,5 ; 5].

La fonction G est dérivable sur $[0,5\ ;\ 5]$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.
La fonction G est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0,5\ ;\ 5]\ ;\ G(x) = u(x)v(x) \quad : \quad \begin{cases} u(x) = \ln(x) & ; \quad u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = [\ln(x) + 1] & ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,5\ ;\ 5],\ \ G'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ G'(x) &= \frac{1}{x}\left[\ln(x) + 1\right] + \ln(x) \times \frac{1}{x} \\ G'(x) &= \frac{2\ln(x) + 1}{x} = g(x) \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0,5\ ;\ 5]\ ;\ G'(x) = g(x)}$$

Et G est une primitive de g sur [0,5 ; 5].

4. c. Déterminer l'aire de $\mathcal{D}$ exprimée en unités d'aire.

La fonction g est continue car dérivable et strictement positive sur [0,5 ; 5] donc l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est, exprimée en unités d'aire $(u.a.)$:

$$\begin{aligned} \int_1^3 g(t)\,\mathrm{d}\,t &= G(3) - G(1) \\ \mathscr{A}_{\mathcal{D}} &= \ln(3)\left(\ln(3) + 1\right) - \ln(1)\left(\ln(1) + 2\right) \\ \mathscr{A}_{\mathcal{D}} &= \ln(3)^2 + \ln(3) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_{\mathcal{D}} = \ln(3)^2 + \ln(3)\ u.a.}$$

Exercice 4. Obligatoire 5 points

Enseignement obligatoire

- parmi les abonnés de l'opérateur A, 18 % d'entre eux, en fin d'année, changent d'opérateur ;
- parmi les abonnés de l'opérateur B, 22 % d'entre eux, en fin d'année, changent d'opérateur.

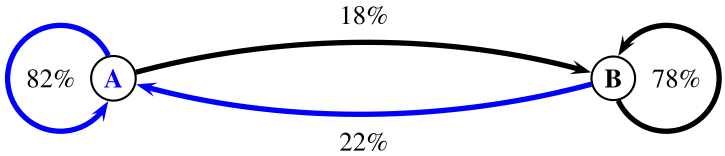
De plus on sait qu'au 1er janvier 2014, 40 % des commerciaux avaient souscrit un abonnement chez A et 60 % chez B. On note, pour tout entier naturel n :

- u_n la proportion de commerciaux disposant d'un abonnement chez A au 1er janvier de l'année $2014+n$:
- v_n la proportion de commerciaux disposant d'un abonnement chez B au 1er janvier de l'année $2014+n$.

On a donc $u_0 = 0,4$ et $v_0 = 0,6$.

1. Justifier que $u_{n+1} = 0,82u_n + 0,22v_n$ et que $u_n + v_n = 1$.

On peut résumer les données du problème à l'aide d'un arbre probabiliste :



- On sait que 18 % des abonnés à l'opérateur A changent d'abonnement en fin d'année, donc il en reste 82 %.
- On sait que 22 % des abonnés de l'opérateur B passent chez A l'année suivante.
- Donc le nombre u_{n+1} d'abonnés à l'opérateur A l'année $n+1$ est constitué :
  - des 82 % des abonnés de l'opérateur A l'année n, ce qui fait $0,82u_n$;
  - et des 22 % d'abonnés de l'opérateur B qui passent chez A, ce qui fait $0,22v_n$.

  Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; u_{n+1} = 0,82u_n + 0,22v_n} \tag{1}$$

- De plus, comme les commerciaux sont abonnés exclusivement chez les opérateurs A et B on peut dire que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; u_n + v_n = 1} \tag{2}$$

2. En déduire que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,6u_n + 0,22$.

Pour tout entier naturel n, on peut exprimer v_n en fonction de u_n à l'aide de l'égalité 2 puis substituer dans l'égalité 1, ainsi on obtient :

$$\left.\begin{array}{l} u_{n+1} = 0,82u_n + 0,22v_n \\ v_n = 1 - u_n \end{array}\right\} \Rightarrow u_{n+1} = 0,82u_n + 0,22\,(1 - u_n)$$

Soit

$$u_{n+1} = 0,82u_n + 0,22 - 0,22u_n$$

D'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; u_{n+1} = 0,6u_n + 0,22}$$

3. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - 0,55$.

3. a. Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - 0,55 \\ &= 0,6u_n + 0,22 - 0,55 \\ &= 0,6u_n - 0.33 \\ &= 0,6\left(u_n - \frac{0,33}{0,6}\right) \\ &= 0,6\,(u_n - 0,55) \\ w_{n+1} &= 0,6w_n \end{aligned}$$

La suite (w_n) est donc une suite **géométrique de raison $q = 0,6$,**
et de premier terme $w_0 = u_0 - 0,55 = 0,4 - 0,55 = -0,15$.

$$\boxed{(w_n) : \begin{cases} w_0 & = -0,15 \\ w_{n+1} & = 0,6\,w_n \end{cases} ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. b. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

On peut donc écrire que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ w_n = -0,15\,(0,6)^n}$$

3. c. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 0,55 - 0,15 \times (0,6)^n$.

De l'égalité $w_n = u_n - 0,55$ définie pour tout entier n, on peut en déduire l'expression de $u_n = w_n + 0,55$ soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ u_n = 0,55 - 0,15 \times (0,6)^n}$$

4. Conjecturer la limite de la suite (u_n). Comment interpréter ce résultat sur l'évolution des parts de marché dans les années futures ?

- **Conjecture**
  En calculant

$$u_{10} \approx 0,549,\ u_{20} \approx 0,54999 \text{ et } u_{30} \approx 0,54999997$$

  On peut conjecturer que la suite (u_n) a pour limite $0,55$.

- **Démonstration** (*non demandée*)
  Par théorème

Théorème 3

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

De ce fait, ici $-1 < q = 0,6 < 1$ et d'après le théorème 3 :

$$\lim_{n \to +\infty} 0,15 \times (0,6)^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (u_n) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0,55}$$

- **Interprétation**
  Le terme u_n désigne la proportion de commerciaux qui disposent d'un abonnement chez l'opérateur A ; cette proportion va donc tendre vers 55 %.

Exercice 4. Spécialité **5 points**

Enseignement de spécialité

Partie A

Parmi les clients, 5% d'entre eux ont visité le site internet de la société lors de la première journée de promotion.

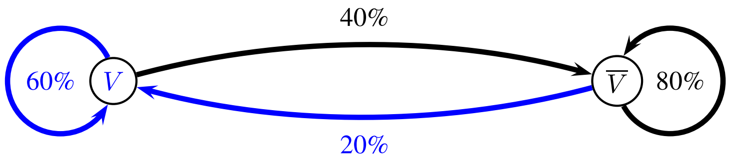
- trois clients sur cinq ayant visité le site internet lors d'une journée promotionnelle, le visitent à nouveau lors de $1^{\text{ère}}$ journée promotionnelle suivante ;
- un client sur cinq n'ayant pas visité le site internet lors d'une journée promotionnelle, le visite lors de la journée promotionnelle suivante.

Pour tout entier naturel n non nul, on note l'état probabiliste ainsi défini par la matrice ligne $P_n = (x_n \;\; y_n)$, où x_n désigne la probabilité que le client, pris au hasard, visite le site internet de la société lors de la n-ième journée de promotion.

1. Pour une journée promotionnelle donnée, on note V , l'évènement « le client a visité le site internet lors de la journée promotionnelle ». Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets V et $\overline{V}$.

- On sait que $\dfrac{3}{5} = 0,6 = 60\%$ des clients ayant visité le site internet lors d'une journée promotionnelle, le visitent à nouveau lors de $1^{\text{ère}}$ journée promotionnelle suivante, donc $\dfrac{2}{5} = 0,4 = 40\%$ ne le font pas ;
- De plus $\dfrac{1}{5} = 0,2 = 20\%$ des clients n'ayant pas visité le site internet lors d'une journée promotionnelle, le visite lors de la journée promotionnelle suivante, donc $\dfrac{4}{5} = 0,8 = 80\%$ ne le font pas.

De ce fait :



2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en prenant les sommets V et $\overline{V}$ dans cet ordre.
En utilisant les notations de l'exercice on peut dire que pour tout entier n :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 0,6x_n + 0,2y_n \\ y_{n+1} &= 0,4x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

La matrice de transition est donc

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}}$$

3. En remarquant que $P_1 = (0,05 \;\; 0,95)$, déterminer P_2. Interpréter ce résultat.
Parmi les clients, 5% d'entre eux ont visité le site internet de la société lors de la première journée de promotion donc $x_1 = 0,05$ et de ce fait $y_1 = 1 - x_1 = 0,95$. On a donc :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,95 \end{pmatrix}$$

Donc

$$P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,95 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0,05 \times 0,6 + 0,95 \times 0,2 & 0,05 \times 0,4 + 0,95 \times 0,8 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\boxed{P_2 = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \end{pmatrix}}$$

Cela signifie donc 22% des clients ont visité le site internet de la société lors de la deuxième journée.

4. On admet que le taux de visites se stabilise à long terme. Montrer que $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ est un état stable de ce système.

D'après le cours, on sait que S est un état stable du système si et seulement si elle vérifie l'égalité :

$$S = S \times M$$

Considérons S la matrice

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Vérifions si l'égalité est vérifiée :

$$S \times M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$
$$S \times M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 0,6 + \frac{2}{3} \times 0,2 & \frac{1}{3} \times 0,4 + \frac{2}{3} \times 0,8 \end{pmatrix}$$
$$S \times M = \begin{pmatrix} \frac{0,6}{3} + \frac{0,4}{3} & \frac{0,4}{3} + \frac{1,6}{3} \end{pmatrix}$$

$$S \times M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = S$$

Donc

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ est un état stable du système.}}$$

Partie B

1. Chaque année la société doit vérifier l'état physique de la fibre optique installée sur son réseau. Un robot inspecte toute la longueur de la fibre optique afin de s'assurer qu'elle ne présente pas de détérioration apparente.
Peut-il parcourir l'ensemble du réseau en suivant les fibres optiques et en empruntant chaque fibre optique une et une seule fois ? Justifier la réponse.
Si un tel parcours est possible, préciser par quel(s) routeur(s) du réseau le robot doit commencer son inspection.

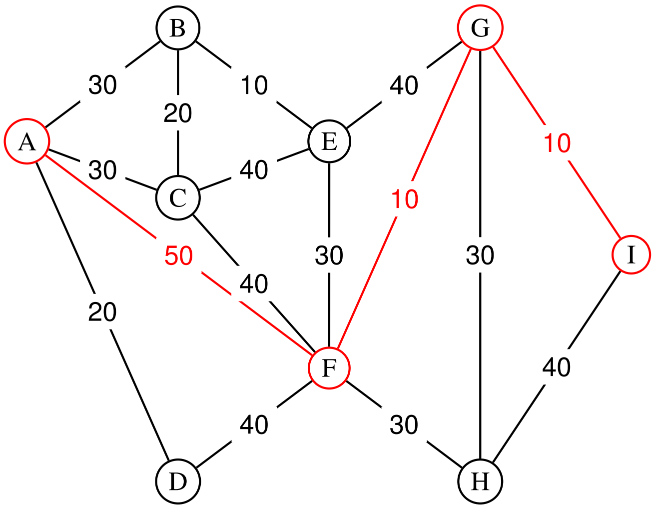
On veut parcourir le réseau proposé dans cette partie en empruntant chaque arête une et une seule fois ; on cherche donc une chaîne eulérienne dans ce graphe.
Citons le théorème d'Euler

Théorème 4 (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

Un graphe connexe contient **une chaîne eulérienne** si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
Un graphe connexe contient **un cycle eulérien** si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (autrement dit tous ses sommets sont de degré pair).

Remarque : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse Leonhard d'Euler (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Étudions le degré de chacun des sommets :



On note les degrés de chaque sommet :

A	B	C	D	E	F	G	H	I
4	3	4	2	4	6	4	3	2

Il y a exactement deux sommets de degrés impairs dans ce graphe, B et H, donc d'après le théorème d'Euler, le graphe contient une **chaîne eulérienne**. On peut réaliser des parcours empruntant chaque fibre optique une fois et une seule, partant du routeur B pour se terminer au routeur H, ou partant du routeur H pour se terminer au routeur B.

Exemple (*non demandé*) :

$$B - A - D - F - A - C - F - E - C - E - G - I - H - G - F - H$$

2. Un ordinateur, relié au routeur A envoie un paquet de données à un ordinateur relié au routeur I.
Le paquet de données a mis 70 ms pour transiter du routeur A au routeur I.
Ce paquet de données a-t-il emprunté le chemin le plus rapide sur le réseau ? Justifier la réponse.
Pour cela appliquons l'algorithme de Dijkstra.
Remarque : L'algorithme porte le nom de son inventeur, l'informaticien néerlandais Edsger Dijkstra (1930-2002), et a été publié en 1959.

de .. à	à B	à C	à D	à E	à F	à G	à H	à I
A	30 (A)	30 (A)	**20 (A)**	∞	50 (A)	∞	∞	∞
$D(20A)$	**30 (A)**	30 (A)		∞	50 (A) ~~60 (D)~~	∞	∞	∞
$B(30A)$		**30 (A)** ~~50 (B)~~		40 (B)	50 (A)	∞	∞	∞
$C(30A)$				**40 (B)** ~~70 (C)~~	50 (A) ~~70 (C)~~	∞	∞	∞
$E(40B)$					**50 (A)** ~~70 (E)~~	80 (E)	∞	∞
$F(50A)$						~~80 (E)~~ **60 (F)**	80 (F)	∞
$G(60F)$							80 (F) ~~90 (G)~~	**70 (G)**

Le chemin le plus court pour relier A à I est :

$$\boxed{A \xrightarrow{50} F \xrightarrow{10} G \xrightarrow{10} I}$$

Donc le paquet de données qui a mis 70 ms pour transiter du routeur A au routeur I a emprunté le chemin le plus rapide.