BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série ES

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 7 (ES)**

ES : ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

- *Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.*
- *Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
- *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
- *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

EXERCICE 1 (5 points) Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

L'entreprise MICRO vend en ligne du matériel informatique notamment des ordinateurs portables et des clés USB.

Partie A

Durant la période de garantie, les deux problèmes les plus fréquemment relevés par le service après-vente portent sur la batterie et sur le disque dur, ainsi :

* Parmi les ordinateurs vendus, 5 % ont été retournés pour un defaut de batterie et parmi ceux-ci, 2 % ont aussi un disque dur défectueux.
* Parmi les ordinateurs dont la batterie fonctionne correctement, 5 % ont un disque dur défectueux.

On suppose que la société MICRO garde constant le niveau de qualité de ses produits.
Suite à l'achat en ligne d'un ordinateur :

Proposition 1
La probabilité que l'ordinateur acheté n'ait ni problème de batterie ni problème de disque dur est égale à $0,08$ à $0,01$ près.

Proposition 2
La probabilité que l'ordinateur acheté ait un disque dur défectueux est égale à $0,0485$.

Proposition 3
Sachant que l'ordinateur a été retourné pendant sa période de garantie car son disque dur était défectueux, la probabilité que sa batterie le soit également est inférieure à $0,02$.

Partie B

L'autonomie de la batterie qui équipe les ordinateurs portables distribués par la société MICRO, exprimée en heure, suit une loi normale d'espérance $\mu = 8$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

Proposition 4
La probabilité que l'ordinateur ait une autonomie supérieure ou égale à 10 h est inférieure à $0,2$.

Partie C

L'entreprise MICRO vend également des clés USB et communique sur ce produit en affirmant que 98 % des clés commercialisées fonctionnent correctement.
Sur 1 000 clés prélevées dans le stock, 50 clés se révèlent défectueuses.

Proposition 5
Ce test, réalisé sur ces 1000 clés, ne remet pas en cause la communication de l'entreprise.

EXERCICE 2 (5 points) Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les sites internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut, à toutes les minutes, soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

- Pour un internaute connecté sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,2.
- Pour un internaute connecté sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,4.
- Pour un internaute connecté sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec B.

L'unité de temps est la minute, et à un instant $t = 0$, le nombre de visiteurs est, respectivement sur les sites A, B et C : 100, 0 et 0.

On représente la distribution des internautes sur les trois sites après t minutes par une matrice N_t ; ainsi $N_0 = (100 \quad 0 \quad 0)$.

On suppose qu'il n'y a ni déconnexion pendant l'heure (de $t = 0$ à $t = 60$) ni nouveaux internautes visiteurs.

1. Représenter le graphe probabiliste de sommets A, B et C correspondant à la situation décrite.
2. Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe (dans l'ordre A, B, C).
3. On donne

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M^{20} \approx \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \end{pmatrix}$$

   Calculer N_2. Interpréter le résultat obtenu.
4. Calculer $N_0 \times M^{20}$. Conjecturer la valeur de l'état stable et interpréter la réponse.
5. Un des internautes transmet un virus à tout site qu'il visitera.
   Il se connecte initialement sur le site C et commence sa navigation.
   À l'instant $t = 0$, le site C est donc infecté.

   a. Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté ?
   b. Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés ?

EXERCICE 3 (4 points) Commun à tous les candidats

On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = -2(x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

Partie A

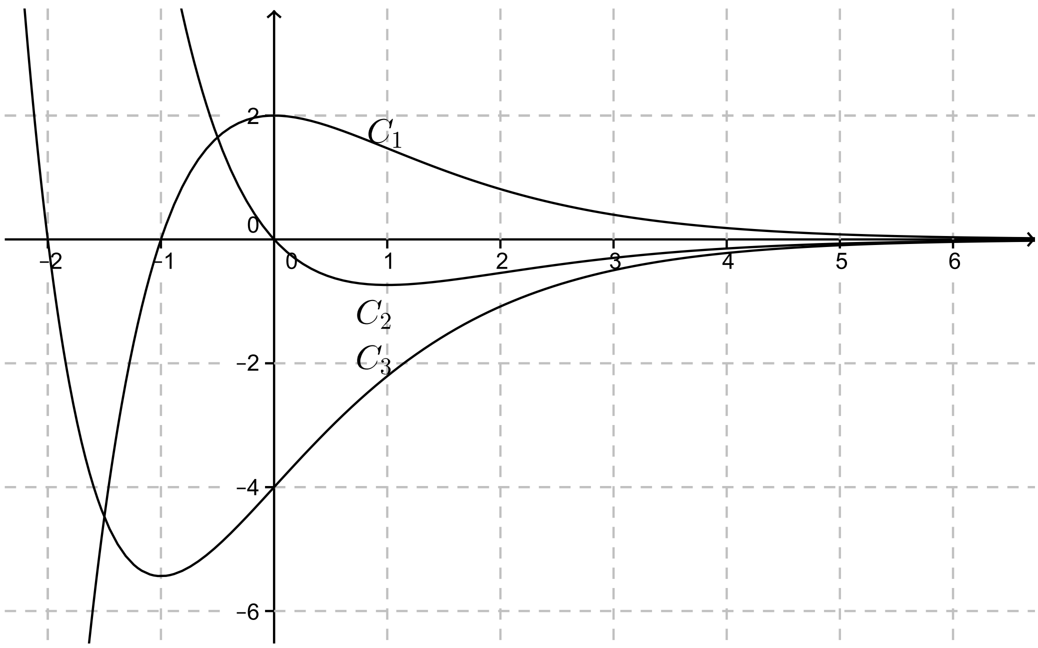
1. Calculer $f(-1)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
2. Justifier que $f'(x) = 2(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ où f' est la fonction dérivée de f.
3. En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes C_1, C_2 et C_3 ont été représentées.

L'une de ces courbes représente la fonction f, une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.

Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f.
Indiquer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe.



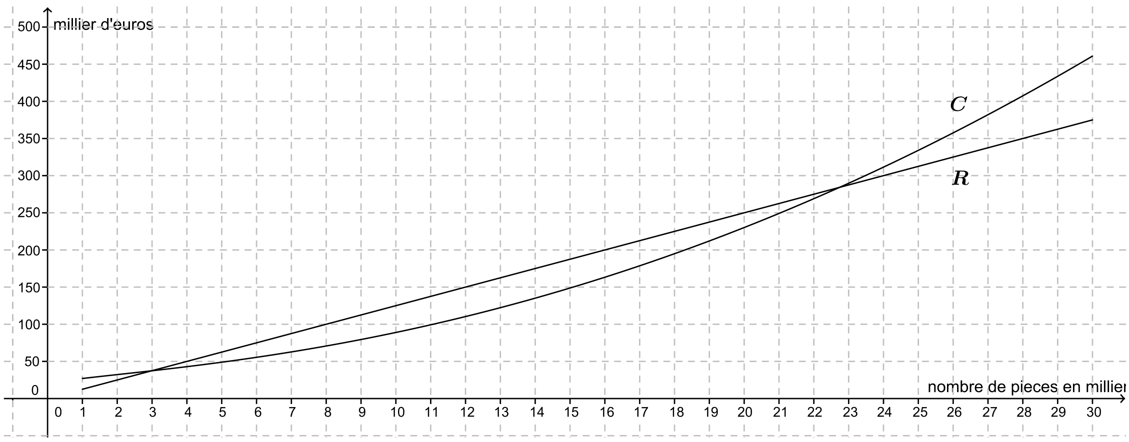
EXERCICE 4 (6 points) Commun à tous les candidats

Une entreprise produit et vend des composants électroniques.
Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 1 000 et 30 000 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On donne ci-dessous R et C les représentations graphiques respectives des fonctions recette et coût sur l'intervalle $[1\ ;\ 30]$.



Par lecture graphique, donner une estimation des valeurs demandées.

1. Quel est le coût de production de 21 000 pièces ?
2. Pour quelles quantités de pièces produites l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?
3. Pour quel nombre de pièces produites le bénéfice est-il maximal ?

Partie B

Le bénéfice en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers de pièces, est donné sur l'intervalle $[1\ ;30]$ par $B(x) = -0,5x^2 + 6x - 20 + 2x\ln x$.

1. Montrer que $B'(x) = -x + 8 + 2\ln x$, où B' est la dérivée de B sur l'intervalle $[1\ ;30]$.

2. On admet que $B''(x) = -1 + \dfrac{2}{x}$, où B'' est la dérivée seconde de B sur l'intervalle $[1\ ;30]$. Justifier le tableau de variation ci-contre de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1\ ;30]$.

x	1		2		30
$B'(x)$	7	$\nearrow$	$6 + 2\ln 2$	$\searrow$	$-22 + 2\ln 30$

3. **a.** Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1;\ 30]$.
   b. Donner une valeur approchée au millième de la valeur de α.
4. En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1\ ;30]$, et donner le tableau de variation de la fonction bénéfice B sur ce même intervalle.
5. Quel est le nombre de pièces à produire, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal ?
   Quel est ce bénéfice maximal (arrondi au millier d'euros) ?