Baccalauréat 2014 - ES/L
Liban

Série ES/L   Mardi 27 Mai 2014
Correction

Exercice 1.   Probabilités   5 points

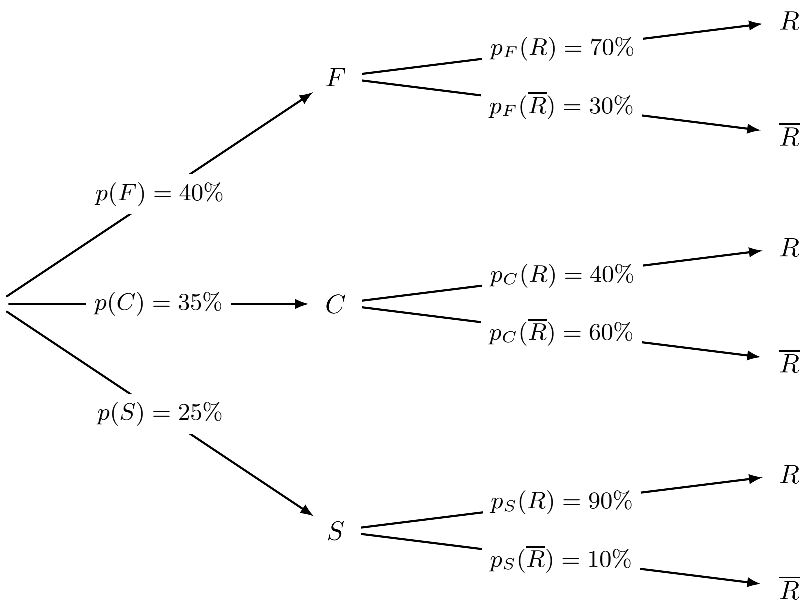
Commun à tous les candidats.

Partie A

1. D'après les données de l'énoncé, préciser les probabilités $p(F)$ et $p_S(R)$.

- « 40% des clients sont des familles » donc : $\boxed{p(F) = 40\% = 0,4}$;
- « 90% des personnes seules laissent un pourboire » donc : $\boxed{p_S(R) = 90\% = 0,9}$.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



3.

3. a. Calculer $p\,(F \cap R)$.

$$\begin{aligned} p\,(F \cap R) &= p_F(R) \times p(F) \\ &= 0,7 \times 0,4 \end{aligned}$$

$$\boxed{p\,(F \cap R) = 0,28 = 28\%}$$

3. b. Calculer $p\,(R)$.

D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p\,(R) &= p\,(F \cap R) + p\,(C \cap R) + p\,(S \cap R) \\ &= 0,28 + p_C(R) \times p(C) + p_S(R) \times p(S) \\ p\,(R) &= 0,28 + 0,4 \times 0,25 + 0,9 \times 0,35 \end{aligned}$$

$$\boxed{p\,(R) = 0,645 = 64,5\%}$$

4. Sachant que le serveur a reçu un pourboire, calculer la probabilité que ce pourboire vienne d'un couple. Le résultat sera arrondi à 10^{-3} .
On cherche donc $p_R(C)$ or on a :

$$\begin{aligned} p_R(C) &= \frac{P\left(R \cap C\right)}{p(R)} \\ &= \frac{p_C(R) \times p(C)}{p(R)} \\ p_R(C) &= \frac{0,4 \times 0,35}{0,645} \end{aligned}$$

et donc à 10^{-3} près :

$$\boxed{p\left(R\right) \approx 0,217}$$

Partie B

1. Calculer :

1. a. la probabilité que le montant total des pourboires reçus par le serveur soit compris entre 6 et 24 euros.
La variable aléatoire X qui, à un soir donné, associe le montant total en euro des pourboires obtenus par le serveur, suit la loi normale d'espérance $\mu = 15$ et d'écart-type $\sigma = 4,5$.
La probabilité que le montant total des pourboires reçus par le serveur soit compris entre 6 et 24 euros se traduit par la probabilité de l'évènement $(6 \leq X \leq 24)$. La calculatrice nous donne alors arrondi au centième :

$$\boxed{P\left(6 \leq X \leq 24\right) \approx 0,95}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.normFDR}(6, 24, 15, 4.5) \approx 0{,}954\,499\,875\,972$$

1. b. $p\left(X \geq 20\right)$.
La calculatrice nous donne arrondi au centième :

$$\boxed{P\left(X \geq 20\right) = 1 - P\left(X < 20\right) \approx 0,13}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.normFDR}(20, \infty, 15, 4.5) \approx 0{,}133\,260\,306\,426$$

2. Calculer la probabilité que le montant total des pourboires du serveur soit supérieur à 20 euros sachant que ce montant est compris entre 6 et 24 euros.
On cherche donc la probabilité conditionnelle :

$$p_{6 \leq X \leq 24}\left(X \geq 20\right) = \frac{p\Big(\left(6 \leq X \leq 24\right) \cap \left(X \geq 20\right)\Big)}{p\left(6 \leq X \leq 24\right)}$$

or on a de façon évidente $(6 \leq X \leq 24) \cap (X \geq 20) = (20 \leq X \leq 24)$ donc :

$$p_{6 \leq X \leq 24}\left(X \geq 20\right) = \frac{p\left(20 \leq X \leq 24\right)}{p\left(6 \leq X \leq 24\right)}$$

La calculatrice nous donne arrondi au centième :

$$\boxed{p_{6 \leq X \leq 24}\left(X \geq 20\right) \approx 0,12}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.normFDR}(20, 24, 15, 4.5)/\text{TIStat.normFDR}(6, 24, 15, 4.5) \approx 0{,}115\,778\,165\,293$$

Exercice 2. QCM 4 points

Commun à tous les candidats.
Un fumeur est dit fumeur régulier s'il fume au moins une cigarette par jour. En 2010, en France, la proportion notée p de fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, était de $p = 0,236$.

(Source : Inpes)

1. $\boxed{\textbf{Réponse c : } 0,068}$

On cherche la probabilité que, sur un groupe de 10 jeunes âgés de 15 à 19 ans choisis au hasard et de manière indépendante, aucun ne soit fumeur régulier.
On appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de fumeurs régulier dans le groupe de 10 personnes. Les 10 tirages sont **indépendants**, **aléatoires** et **identiques**. A chaque tirage, on a 2 issues :

- le jeune est un fumeur régulier ;
- le jeune n'est pas un fumeur régulier.

Par conséquent X peut être vu comme **10 répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli** avec une probabilité de succès $p = 0,236$. La variable X suit la **loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,236$**.
Avec :

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\} \ ; \ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On cherche la valeur de $P(X = 0)$ soit :

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0,236^0 (1 - 0,236)^{10}$$

On obtient arrondi au millième.

$$\boxed{P(X = 0) \approx 0,068}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.binomFdR}(10, 0.236, 0) \approx 0{,}067\,753\,788\,758$$

2. $\boxed{\textbf{Réponse a : } I_{500} \approx [0,198; 0,274]}$

On cherche un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 de la fréquence de fumeurs réguliers dans un échantillon de $n = 500$ jeunes âgés de 15 à 19 ans.

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est :

$$I_n = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

où p désigne la proportion de ce caractère dans la population.

On a $n = 500$, $p = 0,236$ alors on sait que puisque :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 500 \geq 30 \\ \checkmark & np = 500 \times 0,236 = 118 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 500 \times 0,764 = 382 \geq 5 \end{cases}$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% pour la fréquence F_{500} est :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,236 - 1,96\frac{\sqrt{0,236 \times 0,764}}{\sqrt{500}}\ ;\ 0,236 + 1,96\frac{\sqrt{0,236 \times 0,764}}{\sqrt{500}}\right]$$

soit puisque les borne sont :

- $p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}198\,8$. On arrondit la borne inférieure par défaut au millième soit $\mathbf{0,198}$.
- $p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}273\,2$. On arrondit la borne supérieure par excès au millième soit $\mathbf{0,274}$.

$$\boxed{I \approx [0{,}198\ ;\ 0{,}274]}$$

3. $\boxed{\textbf{Réponse d : } n = 27\,707}$

On cherche taille n de l'échantillon choisi afin que l'amplitude de l'intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 soit inférieure à $0,01$. L'amplitude de l'intervalle de fluctuation au seuil 0,95 est donnée par :

$$\left(p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) - \left(p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = 2 \times 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

On cherche donc n tel que :

$$\begin{aligned}
3,92 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,01 &\iff 3,92 \times \frac{\sqrt{0,236(1-0,236)}}{\sqrt{n}} = 0,01 \\
&\iff 3,92 \times \sqrt{0,236(1-0,236)} = 0,01\ \sqrt{n} \\
&\iff \sqrt{n} = \frac{3,92}{0,01} \times \sqrt{0,236(1-0,236)}
\end{aligned}$$

et puisque n est positif on a

$$\iff n = \left(\frac{3,92}{0,01}\right)^2 \times 0,236(1-0,236)$$

Puisque l'on cherche n étant entier naturel on prendra $n = 27\,707$.

4. $\boxed{\textbf{Réponse b : } [\mathbf{0,33\ ;\ 0,46}]}$

Dans un échantillon de 250 jeunes fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, 99 sont des filles. On cherche, au seuil de 95%, un intervalle de confiance de la proportion de filles parmi les fumeurs réguliers âgés de 15 à 19 ans.
La fréquence observée est donc $f = \dfrac{99}{250}$.
On a $n = 250$, $f = 0,396$ alors :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 250 \geq 30 \\ \checkmark & nf = 250 \times 0,396 = 99 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) = 151 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle de confiance au seuil de 95% est alors :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,396 - \frac{1}{\sqrt{250}}\ ;\ 0,396 + \frac{1}{\sqrt{250}}\right]$$

soit puisque les borne sont :

- $0,396 - \dfrac{1}{\sqrt{250}} \approx 0{,}332\,754$. On arrondit la borne inférieure par défaut soit $\mathbf{0,33}$.
- $0,396 + \dfrac{1}{\sqrt{250}} \approx 0{,}459\,245\,55$. On arrondit la borne supérieure par excès soit $\mathbf{0,46}$.

$$\boxed{I \approx [0{,}33\ ;\ 0{,}46]}$$

Exercice 3. Obligatoire — 5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L.
On note $a_0 = 2\,500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2013 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $2013 + n$.

1.

1. a. Calculer a_1 et a_2.

- a_1 représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année 2014. Or chaque année, 80% des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et il y aura 400 nouveaux adhérents. De ce fait :

$$\boxed{a_1 = 0,8 \times a_0 + 400 = 2\,400}$$

- a_2 représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année 2015. Aux 80% des inscrits de 2014, on ajoute 400 nouveaux adhérents. De ce fait :

$$\boxed{a_2 = 0,8 \times a_1 + 400 = 2\,320}$$

1. b. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a la relation $a_{n+1} = 0,8 \times a_n + 400$.
a_{n+1} représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $2013 + n + 1$.
Or en l'année $2013 + n + 1$, on compte 80% des a_n inscrits de l'année passée, soit $0,8 \times a_n$ et 400 nouveaux adhérents. De ce fait la suite (a_n) est définie par :

$$\boxed{(a_n) : \begin{cases} a_0 & = 2\,500 \\ a_{n+1} & = 0,8 \times a_n + 400 \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = a_n - 2\,000$.

2. a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0,8$.
Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - 2\,000 \\ &= 0,8 \times a_{n+1} + 400 - 2\,000 \\ &= 0,8 \times a_{n+1} - 1\,600 \\ &= 0,8\left(a_n - \frac{1\,600}{0,8}\right) \\ &= 0,8\,(a_n - 2\,000) \\ v_{n+1} &= 0,8\,v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite **géométrique de raison $q = 0,8$,**
et de premier terme $v_0 = a_0 - 2\,000 = 2\,500 - 2\,000 = 500$.

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = 500 \\ v_{n+1} & = 0,8\,v_n \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. b. En déduire que le terme général de la suite (a_n) est $a_n = 500 \times 0,8^n + 2\,000$.

- Puisque (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,8$, et de premier terme $v_0 = 500$, on écrire le terme général en fonction de n :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ v_n = 500\,(0,8)^n}$$

- De l'égalité $v_n = a_n - 2\,000$ définie pour tout entier n, on peut en déduire l'expression de $a_n = v_n + 2\,000$ soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ a_n = 500 \times (0,8)^n + 2\,000}$$

‘

2. c. Calculer la limite de la suite (a_n).
Par théorème

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a
$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

De ce fait, ici $-1 < q = 0,8 < 1$ et d'après le théorème 1 : $\lim_{n \to +\infty} (0,8)^n = 0$.
Ce qui nous donne la limite de la suite (a_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ a_n = 500 \times (0,8)^n + 2\,000$$

soit
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = 2\,000}$$

2. d. Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhérents à la médiathèque si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir ?
Cela signifie donc qu'au bout d'un grand nombre d'années la médiathèque aura un nombre d'adhérents proche de 2 0000.

2. e. Algorithme.

2. e. 1. Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.
Cet algorithme fournit le rang de la suite (a_n) à partir duquel $a_n < 2\,050$.

2. e. 2. À l'aide de la calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme et interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.
En utilisant le menu « suite » de la calculatrice on trouve $N = 11$.
Cela signifie donc qu'à partir de 2024 la médiathèque aura moins de 2 050 adhérents.

Exercice 3. Spécialité - Graphes — 5 points

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Préciser si ce graphe est connexe en justifiant la réponse.

Un graphe est dit connexe si quels que soient les sommets u et v, il existe une chaîne de u vers v. C'est-à-dire, s'il existe une suite d'arêtes permettant d'atteindre v à partir de u. Dans le graphe proposé, il existe une chaîne entre chacun des sommets par conséquent ce graphe est connexe.

2. Déterminer, en justifiant, si l'agent de service peut passer par toutes les salles en utilisant une fois et une seule chaque passage.

Théorème 3 (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

Un graphe connexe contient **une chaîne eulérienne** si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
Un graphe connexe contient **un cycle eulérien** si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (autrement dit tous ses sommets sont de degré pair)

Remarque : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse Leonhard d'Euler (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

Étudions le degré de chacun des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F	H
Degré	4	2	4	3	4	3	2

Donc **deux sommets sont de degré impair**, les sommets D et F. Par conséquent ce graphe connexe admet une **chaine eulérienne**. **L'agent de service peut passer par toutes les salles en utilisant une fois et une seule chaque passage**.

3. On range les sommets par ordre alphabétique. Donner la matrice d'adjacence M associée au graphe.

La matrice d'adjacence pour un graphe fini G à $n=7$ sommets est une matrice de dimension 7×7 dont l'élément non-diagonal a_{ij} est le nombre d'arêtes liant le sommet i au sommet j. L'élément diagonal a_{ii} est le nombre de boucles au sommet i.
On a donc ici :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. On donne M^4. En déduire le nombre de chemins de longueur 4 entre les sommets B et H.

On peut lire dans la matrice M^4 le terme $a_{27}=a_{72}=6$. Il existe donc 6 chemins de longueur 4 entre les sommets B et H.

5. On a indiqué sur le graphe ci-dessous le temps en minute mis pour passer entre les différentes salles en ouvrant et fermant les portes à clé. Déterminer le temps minimal.

On utilise l'algorithme de Dijkstra

A	B	C	D	E	F	H
2(B)		2(C)				
		6(A)		4(A)	5(A)	
6(C)			3(C)	4(C)		
				4(D)		5(D)
			4(E)		4(E)	
						5(F)

On met donc **5 minutes au minimum pour aller de B à H.**

Exercice 4. Étude de fonction — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ par

$$f(x) = x + 1 + \mathrm{e}^{-x+0,5}$$

1.

1. a. Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 5]$, on a $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5}$ ou f' désigne la fonction dérivée de f .

La fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ 5]$ comme composée de fonctions qui le sont. La dérivée de la fonction e^{u}, pour u dérivable sur cet intervalle est $u'\,\mathrm{e}^{u}$. De ce fait :

$$\boxed{\forall x \in [0\ ;\ 5],\quad f'(x) = (x+1)' + \left(\mathrm{e}^{-x+0,5}\right)' = 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5}}$$

1. b. Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ l'équation $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned}\forall x \in [0\ ;\ 5],\quad f'(x) = 0 &\iff 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5} = 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{-x+0,5} = 1\end{aligned}$$

On compose par la fonction $x \mapsto \ln x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = 0 \iff -x + 0,5 = \ln 1 = 0$$

$$\boxed{\forall x \in [0\ ;\ 5],\quad f'(x) = 0 \iff x = 0,5}$$

1. c. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.

$$\begin{aligned}\forall x \in [0\ ;\ 5],\quad f'(x) > 0 &\iff 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5} > 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{-x+0,5} > 1\end{aligned}$$

On compose par la fonction $x \mapsto \ln x$ définie et **croissante** sur $\mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = 0 \iff -x + 0,5 > \ln 1 = 0$$

$$\boxed{\forall x \in [0\ ;\ 5],\quad f'(x) > 0 \iff x > 0,5}$$

de ce fait, pour conclure : $\boxed{\forall x \in [0\ ;\ 5]\ ;\ \begin{cases} f'(x) = 0 & \iff x = 0,5 \\ f'(x) > 0 & \iff 0,5 < x \leq 5 \\ f'(x) < 0 & \iff 0 \leq x < 0,5 \end{cases}}$

1. d. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.

x	0		$\frac{1}{2}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$1 + \mathrm{e}^{0,5}$	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$6 + \mathrm{e}^{-4,5}$

2. On note α l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et Δ.

2. a. Donner, par lecture graphique, un encadrement de α à 0,5 près.

$$\boxed{2 < \alpha < 2,5}$$

2. b. Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ l'inéquation $f(x) < 1,5x$.
Les solutions de l'inéquation $f(x) < 1,5x$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ qui sont en dessous de la droite Δ. On obtient graphiquement :

$$\boxed{f(x) < 1,5x \iff x \in]\alpha\ ;\ 5]}$$

.

Partie B

1.

1. a. Déduire de la partie A, le nombre de cartes à produire pour avoir un coût minimal d'utilisation de la machine.
La fonction f représente le coût d'utilisation de la machine en fonction de la quantité x de cartes produites, lorsque x est exprimé en centaines de cartes et $f(x)$ en centaines d'euros. Donc le nombre de cartes à produire pour avoir un coût minimal d'utilisation de la machine correspond au minimum de la fonction f. Ce minimum est de $2,5$ d'après la question précédente et est atteint pour $x = 0,5$.
Donc **le nombre de cartes à produire pour avoir un coût minimal d'utilisation de la machine est de $100 \times 0,5 = 50$**.

1. b. Chaque carte fabriquée par la machine est vendue 1,50 euros. La recette perçue pour la vente de x centaines de cartes vaut donc $1,5x$ centaines d'euros. Vérifier que le bénéfice obtenu, en centaines d'euros, par la vente de x centaines de cartes est donné par $B(x) = 0,5x - 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5}$.
Le bénéfice s'obtient en effectuent la différence des recettes et des coûts donc :

$$\boxed{B(x) = 1,5x - f(x) = 0,5x - 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5}}$$

2.

2. a. Montrer que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.
La fonction B est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ et :

$$\forall x \in [0\ ;\ 5]\ ;\ B'(x) = (1,5x)' - f'(x)$$

$$\boxed{\forall x \in [0\ ;\ 5]\ ;\ B'(x) = 0,5 + \mathrm{e}^{-x+0,5}}$$

Une exponentielle est toujours strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc B' est strictement positive sur $[0\ ;\ 5]$.
La fonction B est en conséquence strictement croissante sur $[0\ ;\ 5]$.

2. b. Montrer que, sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$, l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution comprise entre 2,32 et 2,33.
Citons le corollaire du TVI.

Théorème 4 (Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848, Prague, Empire d'Autriche).

- La fonction B est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$;
- $\begin{cases} B(0) = -1 - \mathrm{e}^{0,5} & < 0 \\ B(5) = 1,5 - \mathrm{e}^{-4,5} & > 0 \end{cases}$
- L'image par B de l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ est $[B(0)\ ;\ B(5)]$.
- Le réel $k = 0$ appartient à l'intervalle image $[B(0)\ ;\ B(5)[$.

Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, **l'équation $\boldsymbol{B(x) = k = 0}$ admet une solution unique $\boldsymbol{\alpha}$ sur l'intervalle $[\mathbf{0}~;~\mathbf{5}]$**.

On obtient :

$$\begin{cases} B(2,32) < 0 \\ B(2,33) > 0 \end{cases}, \text{ donc } \boxed{2,32 < \alpha < 2,33}$$

3. On dira que l'entreprise réalise un bénéfice lorsque $B(x) > 0$. Indiquer la quantité minimale qui doit figurer sur le carnet de commandes de l'entreprise pour que celle-ci puisse réaliser un bénéfice.

L'entreprise réalise un bénéfice lorsque $B(x) > 0$ donc, puisque B est strictement croissante sur $[0~;~5]$, quand $x > \alpha$ avec $2,32 < \alpha < 2,33$.

L'entreprise réalise donc un bénéfice pour une quantité de cartes produites **supérieure ou égale à 233**.

- Fin du Devoir -