

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2013

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES

- Série L -

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 4

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
Conformément à la réglementation en vigueur.*

*Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le
texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète
ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1 à 4.

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville. Chaque année, 12,5 % de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent.
En 2012, la ville comptait 40 000 habitants.

On note U_n le nombre d'habitants de la ville en l'année 2012 + n .

On a donc $U_0 = 40\,000$.

On admet que la suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_{n+1} = 0,875 \times U_n + 1\,200$.

On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 9\,600$.

Les questions numérotées de 1 à 5 de cet exercice forment un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, quatre affirmations sont proposées ; une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Pour chaque question, le candidat notera sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

1) La valeur de U_1 est :

- a) 6 200 b) 35 000 c) 36 200 d) 46 200

2) La suite (V_n) est :

- a) géométrique de raison $-12,5\%$ c) géométrique de raison $-0,875$
b) géométrique de raison $0,875$ d) arithmétique de raison $-9\,600$

3) La suite (U_n) a pour limite :

- a) $+\infty$ b) 0 c) 1 200 d) 9 600

4) On donne l'algorithme suivant :

```
Variables :  
    U, N  
Initialisation :  
    U prend la valeur 40 000  
    N prend la valeur 0  
Traitement :  
    Tant que U > 10 000  
        N prend la valeur N + 1  
        U prend la valeur 0,875 × U + 1 200  
    Fin du Tant que  
Sortie :  
    Afficher N
```

Cet algorithme permet d'obtenir :

- a) la valeur de $U_{40\,000}$ c) le plus petit rang n pour lequel on a $U_n \leq 10\,000$
b) toutes les valeurs de U_0 à U_N d) le nombre de termes inférieurs à 1 200

5) La valeur affichée est :

- a) 33 b) 34 c) 9 600 d) 9 970,8

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Une association de consommateurs a fait une enquête sur des ventes de sacs de pommes.
On sait que :

- 15 % des sacs sont vendus directement dans l'exploitation agricole et le reste est vendu dans des supermarchés.
- Parmi les sacs vendus directement dans l'exploitation agricole, 80 % contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.
- Parmi les sacs vendus dans des supermarchés, 10 % contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.

On désigne par E l'événement « les sacs de pommes sont vendus sur l'exploitation » et par V l'événement « les sacs contiennent des pommes de variétés différentes ».

L'événement contraire de l'événement A sera noté \bar{A} .

On achète de façon aléatoire un sac de pommes.

- 1) Traduire les trois données de l'énoncé en termes de probabilités.
- 2) Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
- 3) Définir par une phrase l'événement $E \cap V$ puis calculer sa probabilité.
- 4) Montrer que la probabilité que le sac acheté contienne des pommes de variétés différentes est égale à 0,205.
- 5) Le sac acheté contient des pommes d'une seule variété.
Calculer la probabilité qu'il ait été acheté directement sur l'exploitation agricole, arrondir le résultat à 0,001 près.
- 6) Des producteurs, interrogés lors de l'enquête, disposent ensemble de 45 000 sacs. Chaque sac, qu'il contienne un seul type de pommes ou des pommes de variétés différentes, est vendu 0,80 euro sur l'exploitation agricole et 3,40 euros dans des supermarchés.
Calculer le montant total des ventes qu'ils peuvent prévoir.

EXERCICE 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2 ; 8]$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère.

1) Montrer que pour tout réel de l'intervalle $[2 ; 8]$, on a :

$$f'(x) = \frac{-10x + 32}{x^3}$$

2) a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2 ; 8]$.

b) En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[2 ; 8]$.

3) On appelle f'' la dérivée seconde de f sur $[2 ; 8]$.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2 ; 8]$, on a :

$$f''(x) = \frac{20x - 96}{x^4}$$

a) Montrer que f est une fonction convexe sur $[4,8 ; 8]$.

b) Montrer que le point de (C) d'abscisse 4,8 est un point d'inflexion.

4) On considère la fonction F définie sur $[2 ; 8]$ par :

$$F(x) = -x + 10 \ln x + \frac{16}{x}$$

a) Montrer que F est une primitive de f sur $[2 ; 8]$.

b) Calculer $I = \int_2^8 f(x) dx$.

EXERCICE 4 (4 points)

Commun à tous les candidats

Tous les jours, Guy joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.

1) Paul se connecte sur le site. La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20 ; 120]$.

- a) Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes.
- b) Calculer l'espérance mathématique de D . Interpréter ce résultat.

2) L'équipe est maintenant réunie et la partie peut commencer. La durée J (en minute) d'une partie est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(120, 400)$.

- a) Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire J .
- b) Montrer l'équivalence :

$$90 < J < 180 \Leftrightarrow -1,5 < \frac{J - 120}{20} < 3$$

- c) On définit la variable aléatoire X par $X = \frac{J - 120}{20}$.

Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X .

- d) Déterminer la probabilité que la partie dure entre 90 et 180 minutes, à 0,001 près.