Math93.com
MathExams.fr

Brevet des Collèges
DNB 2014 Pondichéry

Mardi 29 Avril 2014
Correction

Exercice 1. PGCD — 6 points

1. Arthur veut répartir les dragées de façon identique dans 20 corbeilles.
Par division euclidienne de 3 003 et de 3 731 par 20 on obtient :

$$3\,003 = 20 \times 150 + 3 \quad \text{et} \quad 3\,731 = 20 \times 186 + 11$$

Chacune des 20 corbeilles sera donc composée de 150 dragées au chocolat et 186 aux amandes.
Il lui restera alors **3 dragées au chocolat et 11 aux amandes**.

2. Emma et Arthur décident de proposer des ballotins dont la composition est identique sans avoir de reste de dragées.

2. a. On ne peut pas faire 90 ballotins sans avoir de reste avec des composition identique. En effet, il faudrait pour cela que 90 soit un diviseur commun de 3 003 et de 3 731 ce qui n'est pas le cas :

$$3\,003 = 90 \times 33 + 33 \quad \text{et} \quad 3\,731 = 90 \times 41 + 41$$

2. b. Le nombre de ballotin cherché, N, est un diviseur commun de 3 003 et de 3 731. Or on cherche le nombre maximum de ballotins et de ce fait N est le PGCD de 3 003 et de 3 731.
Utilisons l'algorithme d'Euclide pour calculer ce PGCD :

$$\begin{aligned} 3731 &= 1 \times 3003 + 728 \\ 3003 &= 4 \times 728 + 91 \\ 728 &= 8 \times 91 + 0 \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul est 91 donc le PGCD de 3 003 et de 3 731 est 91 et le **nombre maximal de ballotins est de 91**.
Puisque :

$$3\,003 = 91 \times 33 \quad \text{et} \quad 3\,731 = 91 \times 41$$

La composition de chacun des **91 ballotins** sera de **33 dragées au chocolat** et **41 aux amandes**.

Exercice 2. QCM — 5 points

Les justifications ici proposées n'étaient pas demandées.

1. $\boxed{\text{La réponse 1 est } \mathbf{C}}$: **soit 5**.

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

2. $\boxed{\text{La réponse 2 est } \mathbf{C}}$: **les périmètres ne sont pas toujours égaux**.
Par exemple un rectangle de longueur 12.5 cm et de largeur 2 cm à une aire égale à 25 cm ^{2} et un périmètre égal à 29 cm.
Or un carré de côté 5 cm a aussi une aire de 25 cm ^{2} et un périmètre de 20 cm.
Il n'est pas superposable au rectangle et n'a pas le même périmètre.

3. $\boxed{\text{La réponse 3 est } \mathbf{A}}$: **la fonction f est affine**.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x - (2x + 7) + (3x + 5) \\ &= 3x - 2x - 7 + 3x + 5 \\ f(x) &= 4x - 2 \end{aligned}$$

Donc f est bien affine, de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a = 4$ et $b = -2$.

4. $\boxed{\text{La réponse 4 est } \mathbf{C}}$: **L'enquête ne peut pas l'aider** car les tirages sont indépendants des tirages passés.

5. $\boxed{\text{La réponse 5 est } \mathbf{A}}$: $\boldsymbol{(x-1)^2-16=(x+3)(x-5)}$.

$$\begin{aligned}(x-1)^2-16&=(x-1)^2-4^2\\&=(x-1+4)(x-1-4)\\(x-1)^2-16&=(x+3)(x-5)\end{aligned}$$

Exercice 3. Recherche non guidée — 3 points

On peut, en partant d'un nombre quelconque noté x, écrire les différentes étapes de cet algorithme :

Étape 1	x	choix du nombre
Étape 2	$x+3$	on ajoute 3
Étape 3	$7\times(x+3)$	on multiplie par 7
Étape 4	$7\times(x+3)+3x$	on ajoute le triple de x
Étape 5	$7\times(x+3)+3x-21$	on retranche 21

L'algorithme conduit, en partant de x, au nombre

$$7\times(x+3)+3x-21$$

qui après développement s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned}7\times(x+3)+3x-21&=7x+21+3x-21\\&=10x\end{aligned}$$

On **obtient bien un multiple de 10, l'affirmation est donc vraie**.

Exercice 4. Recherche non guidée — 7 points

- **Étude du parcours ACDA**.
  - **Données**.
    Le triangle ADC est rectangle en C. L'hypoténuse est donc le côté [AD].
  - **Le théorème**.
    donc d'après le *théorème de Pythagore* :

$$\begin{aligned}AD^2&=AC^2+CD^2\\AD^2&=1,4^2+1,05^2\\AD^2&=3,0625\end{aligned}$$

  - **Conclusion**.
    et puisque AD est une longueur, AD est positif et donc

$$\boxed{AD=\sqrt{3,0625}=1,75\text{ km.}}$$

    Le parcours ACDA mesure donc :

$$\boxed{\ell_{ACDA}=AC+CD+DA=1,4+1,05+1,75=4,2\text{ km}}$$

- **Étude du parcours AEFA**.
  - **Donnée**s
    - ❏ Les points A, E', E et A, F', F sont alignés sur deux droites sécantes en A;
    - ❏ Les droites $(E'F')$ et (EF) sont <u>parallèles</u> .

- **Le théorème**
  Donc d'après le *théorème de Thalès* on a :

$$\frac{\boxed{A}E'}{\boxed{A}E} = \frac{\boxed{A}F'}{\boxed{A}F} = \frac{E'F'}{EF}$$

Puis en remplaçant par les valeurs

$$\frac{0,5}{1,3} = \frac{AF'}{AF} = \frac{0,4}{EF}$$

Donc

$$\frac{0,5}{1,3} = \frac{0,4}{EF}$$

puis par produit en croix

$$EF = \frac{0,4 \times 1,3}{0,5}$$

$$\boxed{EF = 1,04 \text{ km}}$$

Le parcours AEFA mesure donc :

$$\boxed{\ell_{AEFA} = AE + EF + FA = 1,3 + 1,04 + 1,6 = 3,94 \text{ km}}$$

- **Choix du parcours**.
  On peux alors calculer les écarts par rapport aux 4 km souhaités :
  - On a : $(4 - \ell_{AEFA}) = 4 - 3,94 = 0,06$
  - De même : $(4 - \ell_{ACDA}) = 4 - 4,2 = -0,2$

  Donc le parcours dont la **longueur est la plus proche de 4 km est le parcours AEFA**.

Exercice 5. Volumes — 8 points

Comme demandé, tous les volumes seront arrondis au cm ^{3}.

1. Le volume de la partie cylindrique est obtenu en multipliant l'aire du disque de base de rayon 5 cm par la hauteur 15 cm soit :

$$\boxed{\mathscr{V} = \pi\, 5^2 \times 15 = 375\, \pi \text{ cm}^3 \approx 1\,178 \text{ cm}^3}$$

2.

2. a. Le volume V_1 du grand cône est obtenue en prenant le tiers du produit de l'aire du disque de base de rayon 5 cm par la hauteur SO = 6 cm soit :

$$\boxed{V_1 = \frac{1}{3} \times \left(\pi\, 5^2\right) \times SO = \frac{25 \times 6}{3}\, \pi = 50\, \pi \text{ cm}^3}$$

2. b. Volume V_2 du tronc de cône.

- Le petit cône au sommet, de hauteur SO', est une réduction du grand cône de rapport :

$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

  donc son volume s'obtient en multipliant par k^3 celui du grand cône soit :

$$\boxed{V_1' = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times V_1 = \frac{V_1}{27} = \frac{50}{27}\, \pi \text{ cm}^3}$$

- Le volume V_2 du tronc de cône est alors égal à $V_1 - V_1'$ soit :

$$\boxed{V_2 = V_1 - V_1' = 50\, \pi - \frac{50}{27}\, \pi = \frac{1\,300}{27}\, \pi \text{ cm}^3 \approx 151 \text{ cm}^3}$$

3. Choix du graphique :

- **Graphique 4 : Exclu**.
  Ce ne peut pas être le graphique 4 car la courbe ne passe pas par l'origine de repère. Or si on ne met pas d'eau dans le bidon, le volume est nul.
- **Graphique 2 : Exclu**.
  Ce ne peut pas être le graphique 2 car le volume d'eau diminue entre $h = 15$ et $h = 18$ par exemple. Cela est impossible car le volume d'eau doit augmenter avec h.
- **Graphique 3 : Exclu**.
  L'augmentation du volume doit diminuer après $h = 15$ or ici elle s'accélère. Par conséquent le graphique 3 est exclu.
- **Graphique 1 : Accepté**.
  Le graphique 1 correspond donc à la situation.

Exercice 6. Statistiques — 7 points

1. Dans la cellule O2, la formule saisie est :

$$\boxed{= SOMME(B2 : N2)} \quad \text{ou} \quad \boxed{= B2 + C2 + D2 + E2 + ... + N2}$$

2.

2. a. La moyenne pondérée par les effectifs de cette série, arrondie à l'unité est :

$$\boxed{\overline{m} = \frac{1 \times 8 + 2 \times 2 + 3 \times 2 + \cdots + 40 \times 1}{26} = \frac{205}{26} \approx 8}$$

2. b. L'effectif total de cette série est de 26 qui est un nombre pair. **La médiane** de cette série sera donc la **moyenne des valeurs de rang 13 et 14**. Ces deux valeurs sont égales à 4 donc :

$$\boxed{m_e = \frac{4+4}{2} = 4}$$

2. c. Les premières valeurs sont très représentées. Ces forts effectifs expliquent pourquoi la médiane est basse.
Par contre, les valeurs de la série à partir de 14 ne sont représentées qu'une seule fois mais elles s'échelonnent jusqu'à 40 qui est une valeur extrême.
On sait d'après le cours que la médiane n'est affectée par aucune observation extrême dans un ensemble de données contrairement à la moyenne. Il est donc logique que la moyenne soit bien supérieur à la médiane.

3. On sait que 70% des pays médaillés ont obtenu au moins une médaille d'or. De ce fait, les 26 pays ayant obtenu au moins une médaille d'or cités dans le tableau de données, représentent 70% du nombre total N de pays médaillés (or, argent ou bronze).

$$N \times 0,7 = 26$$

Le nombre total N de pays médaillés est donc :

$$\boxed{N = \frac{26}{0,7} \approx 37}$$

Par conséquent puisque 26 de ces 37 pays ont obtenus au moins une médaille d'or,

$$37 - 26 = 11$$

11 pays n'ont obtenu que des médailles d'argent et de bronze.

- Fin du devoir -